

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

для обучающихся заочной формы обучения
II курса направления 21.03.02 Землеустройство и кадастры
профиль Городской кадастр

Ростов – на – Дону, 2019

1Й СЕМЕСТР

ВЫСОТНЫЕ СЕТИ СГУЩЕНИЯ

Идея геометрического нивелирования

Рельеф местности - это совокупность неровностей поверхности земли; он является одной из важнейших характеристик местности. Знать рельеф означает знать отметки всех точек местности. Отметка точки - это численное значение ее высоты над некоторой поверхностью, принятой за начало счета высот. Отметку любой точки местности можно определить по топографической карте, однако, точность такого определения будет невысокой. Отметку точки на местности определяют по превышению этой точки относительно другой точки, отметка которой известна. Процесс измерения превышения одной точки относительно другой называется нивелированием.

Начальной точкой счета высот в нашей стране является "Кронштадтский нормальный нуль", который привязан к Кронштадтскому футштоку, расположенному на устое одного из мостов в Кронштадте. От этого нуля идут ходы нивелирования, пункты которых имеют отметки в Балтийской системе высот. Затем от этих пунктов с известными отметками прокладывают новые нивелирные ходы и так далее, пока не получится довольно густая сеть, каждая точка которой имеет известную отметку. Эта сеть называется государственной сетью нивелирования; она покрывает всю территорию страны.

Отметки всех пунктов нивелирных сетей собраны в списки - "Каталоги высот". Эти списки непрерывно пополняются, издаются новые каталоги по новым нивелирным ходам. Для нахождения отметки любой точки местности в Балтийской системе высот нужно измерить ее превышение относительно какого-либо пункта, отметка которого известна и есть в каталоге. Иногда отметки точек определяют в условной системе высот, если поблизости нет пунктов государственной нивелирной сети.

Вследствие того, что измерение превышений выполняют различными приборами и разными способами, различают:

- геометрическое нивелирование (нивелирование горизонтальным лучом),
- тригонометрическое нивелирование (нивелирование наклонным лучом),
- барометрическое нивелирование,
- гидростатическое нивелирование и некоторые другие.

Геометрическое нивелирование или нивелирование горизонтальным лучом выполняют специальным геодезическим прибором - нивелиром; отличительная особенность нивелира состоит в том, что визирная линия трубы во время работы приводится в горизонтальное положение.

Различают два вида геометрического нивелирования: нивелирование из середины и нивелирование вперед.

При нивелировании из середины нивелир устанавливают посередине между точками A и B , а на точках A и B ставят рейки с делениями (рис.6). Рейка в точке A называется задней, рейка в точке B - передней. Сначала наводят трубу на заднюю рейку и берут отсчет a , затем наводят трубу на переднюю рейку и берут отсчет b .

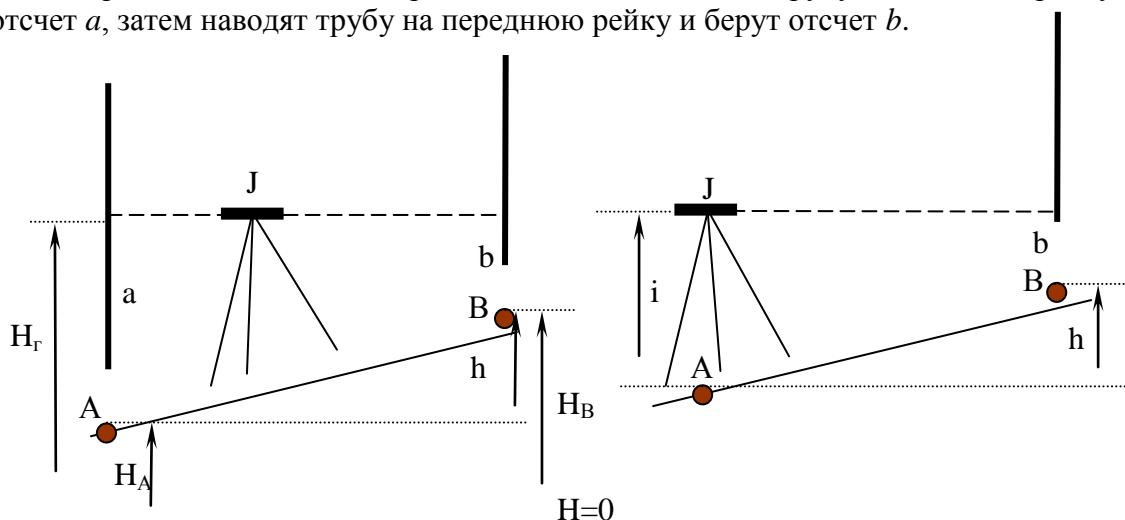


Рисунок 6 – Схема нивелирования из середины Рисунок 7 – Схема нивелирования вперед

Превышение точки B относительно точки A получают по формуле

$$h = a - b \quad (2.1)$$

Если $a > b$, то превышение положительное, если $a < b$, то отрицательное. Отметка точки B вычисляется по формуле

$$H_B = H_A + h \quad (2.2)$$

Высота визирного луча над уровнем моря называется горизонтом прибора и обозначается $H_{ГП}$

$$H_{ГП} = H_A + a = H_B + b.$$

При нивелировании вперед нивелир устанавливают над точкой A так, чтобы окуляр трубы был на одной отвесной линии с точкой A . На точку B ставят рейку с делениями. Измеряют высоту нивелира i над точкой A и берут отсчет b по рейке (рис.7). Превышение h подсчитывают по формуле

$$h = i - b.$$

Отметку точки B можно вычислить через превышение между точками A и B по формуле (2.2) или через горизонт прибора

$$H_B = H_{ГП} - b. \quad (2.3)$$

Если точки A и B находятся на большом расстоянии одна от другой и превышение между ними нельзя измерить с одной установки нивелира, то на линии AB намечают промежуточные точки 1, 2, 3 и т.д. и измеряют превышение по частям (рис.8).

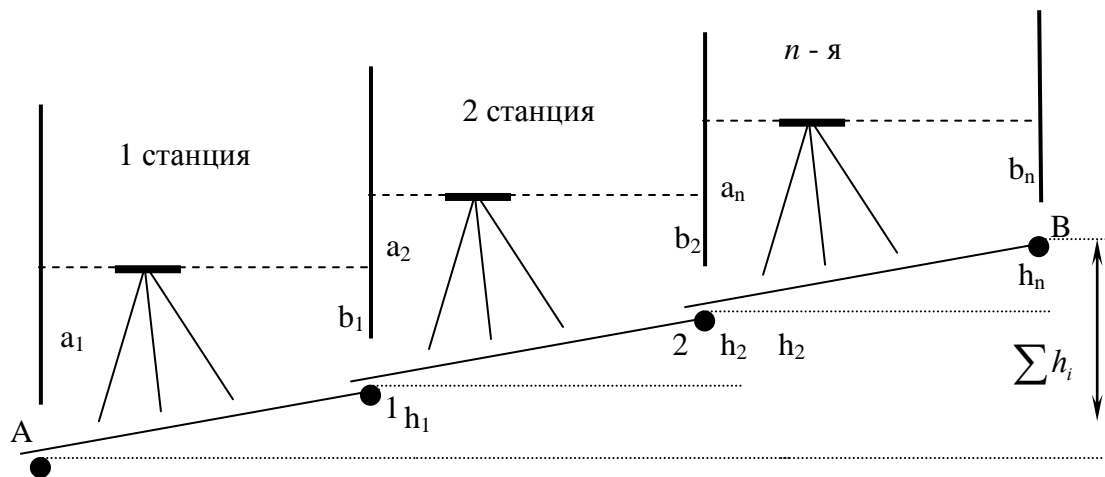


Рисунок 8 – Схема нивелирного хода

На первом участке $A - 1$ берут отсчеты по задней рейке a_1 и по передней – b_1 . Затем переносят нивелир в середину второго участка, а рейку с точки A переносят в точку 2; берут отсчеты по рейкам: по задней – a_2 и по передней – b_2 . Эти действия повторяют до конца линии AB . Точки, на которых отсчеты берут два раза - сначала по передней рейке, а затем по задней, - называются связующими.

Превышение на каждой установке нивелира, называемой станцией, вычисляют по формуле (2.1), а превышение между точками A и B будет равно

$$h_{AB} = \sum h = \sum a - \sum b.$$

Отметка точки B получится по формуле

$$H_B = H_A + \sum h.$$

При последовательном нивелировании получается нивелирный ход.

Влияние кривизны Земли и вертикальной рефракции на измеряемое превышение

Высота точки является одной из её координат; она определяет положение точки по высоте относительно поверхности референц-эллипсоида; высоты всех точек поверхности Земли определяют фигуру Земли в целом. Высоты точек считаются «от уровня моря»,

роль которой может выполнять либо поверхность геоида (система ортометрических высот), либо поверхность квазигеоида (система нормальных высот). Поскольку ни та, ни другая поверхность на местности не обозначены, для вычисления высоты точки существует лишь один вариант: считать известной высоту H_1 одной точки, измерить превышение h другой точки относительно первой точки и вычислить высоту второй точки H_2 по формуле

$$H_2 = H_1 + h.$$

Все четыре системы высот (приближённые высоты, ортометрические высоты, нормальные высоты и динамические высоты) являются моделями по отношению к объективно существующей реальности, которая заключается в том, что на местности можно зафиксировать и использовать только одно направление – направление силы тяжести; отвес фиксирует отвесное (вертикальное) направление, а ось цилиндрического уровня – горизонтальное направление.

Для измерения превышений с помощью горизонтального луча визирования применяется нивелир и две рейки; у нивелира визирная линия трубы в моменты измерений занимает горизонтальное положение, а рейки устанавливаются вертикально в точках 1 и 2. Измеренное с помощью нивелира превышение h является расстоянием между двумя уровенными поверхностями, проведёнными через точки установки реек: задней и передней. Отсчёт по задней рейке обозначается a , по передней – b ; если считать уровенные поверхности горизонтальными плоскостями, а направления силы тяжести в точках 1 и 2 считать параллельными, то превышение между точками 1 и 2 выразится простой формулой (2.1)

$$h = a - b.$$

Во втором приближении будем считать уровенные поверхности сферами, а отвесные линии в точках 1 и 2 – радиусами этих сфер (рис.10), тогда превышение h будет вычисляться по более сложной формуле; приведём вывод этой формулы.

Отметка точки B' , находящейся на плоскости, отличается от отметки точки B , лежащей на сфере, на величину отрезка $BB' = p$ (рис.9). Из треугольника OCB' следует

$$R^2 + s^2 = (R + p)^2,$$

откуда получаем

$$p = \frac{s^2}{2R + p}.$$

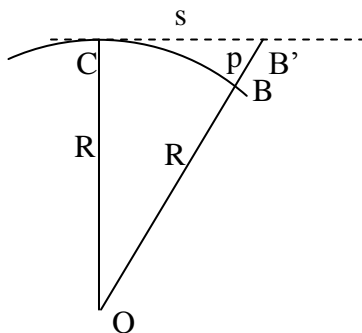


Рисунок 9 – Влияние кривизны Земли на отметки точек

В знаменателе величина p намного меньше величины $2R$, поэтому, отбросив ее, мы допустим несущественную ошибку. Таким образом,

$$p = \frac{s^2}{2R}$$

и

$$h = (a - p_A) - (b - p_B),$$

где p_A и p_B - влияние кривизны Земли в точках A и B соответственно.

Влияние кривизны Земли на отметки точек нужно учитывать при любых расстояниях между точками; так, при $S = 10$ км $p = 7.8$ м, а при $S = 100$ м $p = 0.8$ мм.

Известно, что луч света в атмосфере распространяется по кривой линии, которая называется рефракционной кривой; эту кривую можно считать дугой окружности радиусом $R' = (6 - 7) \cdot R$; отношение радиуса Земли R к радиусу рефракционной кривой R' называется коэффициентом вертикальной рефракции атмосферы и обозначается через k

$$k = \frac{R}{R'};$$

численное значение k колеблется от 0,14 до 0,16; в среднем $k = 0,15$.

Теперь нарисует полную схему взаимного расположения уровненных поверхностей, отвесных линий и визирного луча при измерении превышения между точками 1 и 2 методом геометрического нивелирования из середины (рис.10).

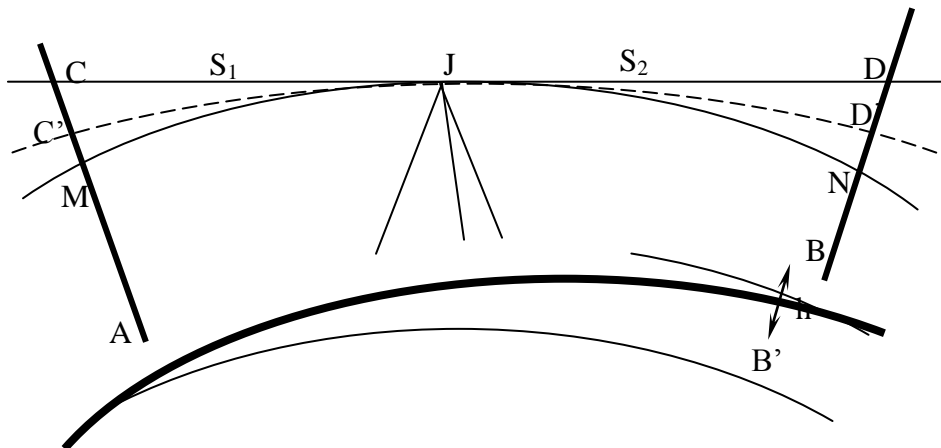


Рисунок 10 – Влияние кривизны Земли и рефракции на измеряемое превышение

Превышение точки B относительно точки A будет равно разности отрезков AM и BN

$$h = AM - BN.$$

Из рисунка видно, что $AC = AM + MC = AC' + C'C$; обозначим AC' - отсчёт a по задней рейке, $C'C$ - влияние вертикальной рефракции r_1 в точке A , AM - расстояние между уровненными поверхностями нивелира и точки A , MC - влияние кривизны Земли p_1 для точки A . Из рисунка видно, что $BD = BN + ND = BD' + D'D$; обозначим BD' - отсчёт b по передней рейке, $D'D$ - влияние вертикальной рефракции r_2 в точке B , BN - расстояние между уровненными поверхностями нивелира и точки B , ND - влияние кривизны Земли p_2 для точки B .

Далее пишем: $a + r_1 = AM + p_1$, откуда $AM = a + r_1 - p_1$.

$$b + r_2 = BN + p_2, \text{ откуда } BN = b + r_2 - p_2.$$

$$h = a + r_1 - p_1 - b - r_2 + p_2,$$

$$h = (a - b) - [(p_1 - r_1) - (p_2 - r_2)].$$

Величину $(p_1 - r_1)$ называют совместным влиянием кривизны Земли и рефракции на отсчёт по рейке в точке A и обозначают f_1 , а величину $(p_2 - r_2)$ - совместным влиянием кривизны Земли и рефракции в точке B и обозначают f_2 .

Далее следуют формулы

$$h = (a - b) - (f_1 - f_2),$$

$$f_1 = p_1 - r_1 = \frac{s_1^2}{2R} - k \cdot \frac{s_1^2}{2R} = \frac{(1-k)}{2R} \cdot s_1^2,$$

$$f_2 = p_2 - r_2 = \frac{s_2^2}{2R} - k \cdot \frac{s_2^2}{2R} = \frac{(1-k)}{2R} \cdot s_2^2,$$

$$h = (a - b) - \frac{(1 - k)}{2R} \cdot (s_1^2 - s_2^2).$$

Рассчитаем влияние второго слагаемого в последней формуле при $s_1 \approx s_2 \approx 100\text{ м}$ и при $|s_1 - s_2| \leq 3\text{ м}$; получим

$$(f_1 - f_2) = \frac{(1 - k)}{2R} \cdot (s_1 + s_2) \cdot (s_1 - s_2) = 0,04\text{ мм}.$$

При $s_1 = s_2$ влияние кривизны земли и рефракции становится равным нулю.

Вывод: при нивелировании строго из середины влияние кривизны Земли и рефракции на измеряемое превышение почти полностью исключается; остаточное влияние рефракции может иметь место, так как условия прохождения визирного луча до задней рейки и до передней рейки могут отличаться.

УСТРОЙСТВО, ПОВЕРКИ И ИССЛЕДОВАНИЯ ТОЧНЫХ НИВЕЛИРОВ

Устройство точных нивелиров

По ГОСТу к точным нивелирам относятся нивелиры, обеспечивающие точность измерения превышений со средней квадратической ошибкой 3 мм на 1 км хода; это нивелиры НЗ, НЗК, НВ1 и им подобные.

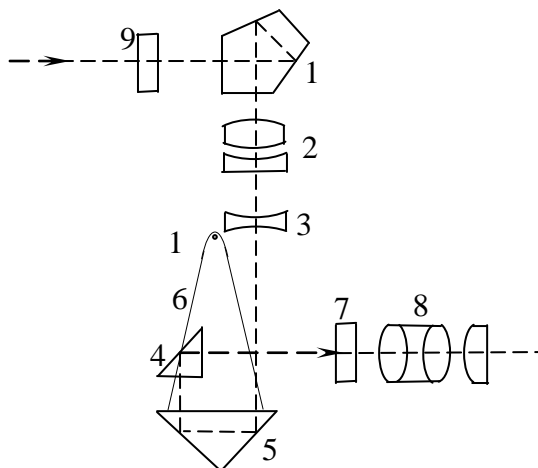
Государственный стандарт предусматривает следующие основные параметры точных нивелиров:

- увеличение зрительной трубы	$V^x \geq 30,$
- наименьшее расстояние визирования	2 м,
- коэффициент нитяного дальномера	$100 \pm 1\%,$
- цена деления цилиндрического уровня при трубе	$15'' \pm 1.5'',$
- цена деления круглого установочного уровня	$10' \pm 2',$
- масса	не более 3 кг.

Точный нивелир должен обеспечить среднюю квадратическую ошибку измерения превышения на станции не более 2 мм при расстоянии от нивелира до реек 100 м.

Среди точных нивелиров есть нивелиры с уровнем при трубе и нивелиры с компенсатором углов наклона зрительной трубы.

В нивелире с компенсатором визирная линия трубы автоматически устанавливается в горизонтальное положение. Существуют жидкостные, механические и оптико-механические компенсаторы. В настоящее время в нивелирах в основном применяются оптико-механические компенсаторы, в которых главным узлом является подвесное маятниковое устройство. На этом устройстве укреплены оптические детали или системы, предназначенные либо для изменения направления главного визирного луча, проходящего через объектив нивелира, либо для параллельного смещения этого луча. Непременной составной частью оптико-механического компенсатора является демпфер, предназначенный для гашения и ограничения собственных колебаний маятниковых подвесных систем. Приведем схему оптико-механического компенсатора в нивелире Ni-007 (Германия) (рис.11).



На рис.11 обозначено: 9 - защитное стекло, 1 - пентапризма для изменения направления горизонтального луча, 2,3 - линзы телеобъектива, 8 – окулярная система призм, 5 – призма маятникового компенсатора, подвешенная на простом физическом маятнике, 4 – неподвижная призма для направления лучей в окуляр 8.

В нивелире НЗК компенсатор состоит из двух прямоугольных стеклянных призм, одна из которых подвешена к верхней части корпуса трубы на двух парах стальных нитей. С помощью призм изображение рейки передается в плоскость сетки нитей по горизонтальному направлению при небольшом наклоне трубы; диапазон компенсируемых углов наклона составляет около 10', ошибка горизонтальности визирной линии трубы - не больше 0,5"; систематическая ошибка недокомпенсации - не более 0,3" на 1' наклона трубы; время затухания колебаний - не более 2 секунд.

Поверки нивелира с уровнем при трубе описаны в [5]; что касается проверок нивелира с компенсатором, то главное условие формулируется несколько по-иному: визирная линия трубы должна быть горизонтальной. Эта проверка выполняется либо двойным нивелированием вперед, либо другим способом [5].

Поверки точных нивелиров

Для нивелиров с уровнем при трубе выполняют три проверки.

1. Проверка установки цилиндрического уровня. отвесная плоскость, проходящая через ось уровня, должна быть параллельна отвесной плоскости, проходящей через визирную ось зрительной трубы. Эта проверка делается, как правило, у высокоточных нивелиров перед выездом в поле.

Величина угла i , то есть проекция на отвесную плоскость угла между осью уровня и визирной осью трубы, должна быть меньше 10". Эту проверку разрешается выполнять тремя способами [5]; мы изложим первый способ - двойное нивелирование вперед. На местности забивают два колышка A и B на расстоянии около 50 м один от другого. Нивелир устанавливают над точкой A так, чтобы окуляр трубы находился на одной вертикальной линии с точкой (рис.13-а). От колышка до центра окуляра измеряют высоту прибора i_1 . Затем рейку ставят в точку B , наводят на нее трубу нивелира, приводят пузырек уровня в нульпункт и берут отсчет по рейке b_1 . Затем нивелир и рейку меняют местами, измеряют высоту инструмента i_2 , приводят пузырек уровня в нуль-пункт и берут отсчет по рейке b_2 (рис.13-б).

Пусть главное условие нивелира не выполняется, и при положении пузырька уровня в нульпункте визирная линия не горизонтальна, а составляет с осью уровня некоторый угол i . Тогда вместо правильного отсчета b_1^0 получается ошибочный $-b_1$. Ошибку отсчета обозначим x , и превышение точки B относительно точки A будет равно

$$h = i_1 - (b_1 + x).$$

При положении нивелира в точке B превышение точки A относительно точки B

$$h' = i_2 - (b_2 + x).$$

Но

$$h = -h',$$

поэтому

$$i_1 - (b_1 + x) = -[i_2 - (b_2 + x)].$$

Отсюда получается

$$x = \frac{1}{2} \cdot (i_1 + i_2) - \frac{1}{2} \cdot (b_1 + b_2).$$

При расстоянии S между нивелиром и рейкой угол i вычисляется по формуле

$$i'' = \frac{x_{mm}}{S_{mm}} \cdot \rho''.$$

При $S = 50m$, $i'' = 10''$ и $\rho \approx (2 \cdot 10^5)''$ получается $x \approx 2,5mm$.

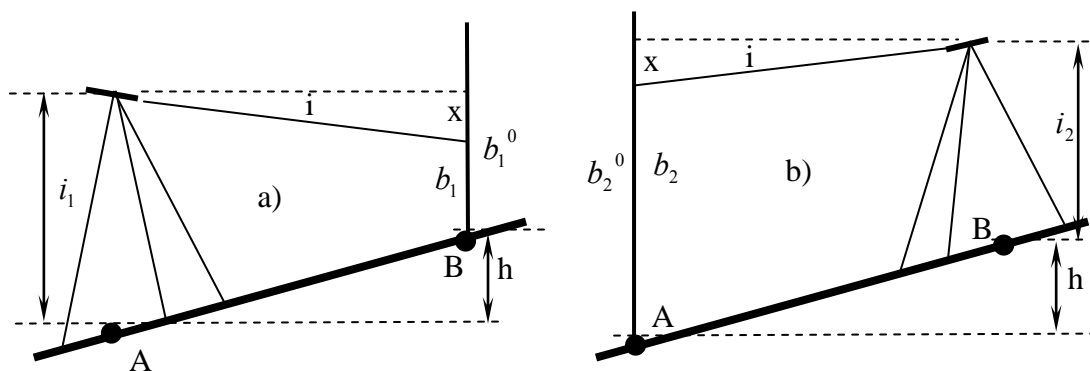


Рисунок 13 – Проверка установки цилиндрического уровня (проверка главного условия)

Если $x > 2,5 \text{ мм}$, необходимо выполнить юстировку уровня, то есть устранить угол i . Для этого элевационным винтом наклоняют трубу нивелира до тех пор, пока отсчет по рейке не будет равен правильному отсчету $b_2^0 = b_2 + x$; при этом пузырек уровня уйдет из нульпункта. Исправительными винтами уровня приводят пузырек в нуль-пункт и повторяют проверку заново.

2. Ось круглого установочного уровня должна быть параллельна оси вращения нивелира. Приводят пузырек круглого уровня в нульпункт, затем поворачивают нивелир по азимуту на 180° . Если пузырек отклонился от нульпункта более чем на 0,3 деления, то на половину отклонения его перемещают обратно с помощью подъемных винтов и на половину - исправительными винтами круглого уровня. Существует и другой, более надежный способ проверки круглого уровня: сначала тщательно устанавливают ось вращения нивелира в отвесное положение с помощью элевационного винта и цилиндрического уровня при трубе, затем исправительными винтами круглого уровня приводят его пузырек в нуль-пункт.

3. Горизонтальная нить сетки нитей должна быть перпендикулярна оси вращения нивелира, то есть быть горизонтальной. Устанавливают нивелир по круглому уровню и наводят краем средней нити на хорошо видимую точку на расстоянии от нивелира около 10 м. Медленно вращают трубу по азимуту с помощью наводящего винта и следят, не сходит ли средняя нить с выбранной точки.

Определение цены деления уровня на экзаменаторе

Точные нивелиры перед их применением должны быть исследованы с целью определения их качественных характеристик и установления степени влияния внешних условий.

Полные исследования выполняют в специальных лабораториях для новых нивелиров и после капитального ремонта по программе, предусмотренной ГОСТом. Неполные исследования выполняются перед началом полевых работ и включают следующие процедуры:

- исследование качества зрительной трубы,
- исследование правильности хода фокусирующей линзы,
- исследование цилиндрического контактного уровня,
- определения коэффициента дальномера и асимметрии нитей,
- исследование качества работы элевационного винта,
- определение диапазона и ошибки работы компенсатора.

Полные исследования уровня выполняют при получении новых нивелиров, после ремонта в случае замены ампулы уровня, а также перед началом полевого сезона. Цель этих исследований – определение цены деления уровня, качества его изготовления, степени компенсированности уровня, то есть непостоянства длины пузырька уровня при

изменении температуры на 1°C , определение средних квадратических ошибок совмещения концов пузырька уровня $m_{\text{сов}}$ и отсчёта по шкале уровня $m_{\text{отс}}$. Лабораторные исследования выполняют на экзаменаторе, полевые – с помощью рейки.

Экзаменатор представляет собой штангу длиной l , один конец которой опирается на шарнир и неподвижен по высоте, а другой может подниматься или опускаться с помощью измерительного винта с делениями по окружности головки (рис.14).

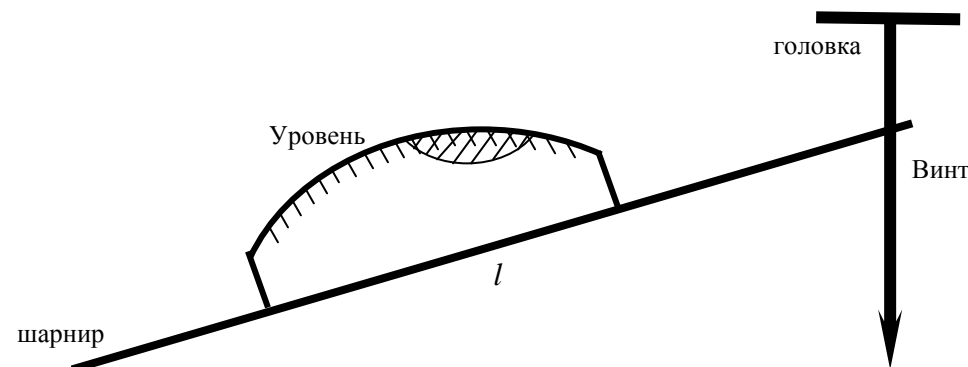


Рисунок 14 – Схема экзаменатора

Ценой деления μ экзаменатора называется угол, на который наклоняется штанга при повороте измерительного винта на одно деление его шкалы. Цену деления уровня τ вычисляют по формуле

$$\tau = \frac{\mu \cdot n}{\delta},$$

где δ - число делений уровня, на которое сместился пузырек при повороте винта на n делений.

Уровень исследуют по всей длине его шкалы в прямом и обратном ходе пузырька двумя приемами. За окончательное значение цены деления принимают среднее арифметическое из двух приемов.

Исследование правильности хода фокусирующей линзы.

Эти исследования выполняют только у нивелиров, предназначенных для передачи высот через водные препятствия, когда неравенство расстояний между нивелиром и задней и передней рейками может достигать нескольких сотен метров.

Для исследований выбирают ровную открытую площадку 60×60 м с твёрдым грунтом и забивают несколько кольшков по окружности радиуса 50 м (рис.15). Сначала нивелир устанавливают в точку А, а рейку – последовательно в точках В, 1, 2, ..., 7 и каждый раз берут по рейке отсчёты; затем повторяют отсчёты, ставя рейку последовательно в точках 7, 6, ..., 1, В. Затем переносят нивелир в точку В, а рейку – последовательно в точках 1, 2, ..., 7 и берут по рейке отсчёты. Эти действия составляют один приём; всего делают три приёма.

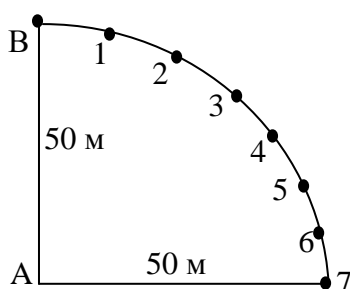


Рисунок 15 – Схема точек при исследовании хода фокусирующей линзы

Затем все измерения обрабатывают с применением формул МНК и вычисляют величины ν , характеризующие правильность хода фокусирующей линзы; на значения ν существуют допуски, разные для разных типов нивелиров (например, для нивелира Н-05 этот допуск равен 0,5 мм).

Определение диапазона и ошибки работы компенсатора.

Полные исследования нивелира с компенсатором включают: определение СКО установки оси вращения нивелира в вертикальное положение, определение диапазона и СКО самоустановки визирной линии трубы в горизонтальное положение, определение систематической ошибки компенсации и времени затухания колебаний подвесной системы компенсатора. Величину диапазона работы компенсатора, СКО установки визирной линии трубы и систематическую ошибку компенсатора в лабораторных условиях определяют с помощью автоколлиматора. В полевых условиях эти исследования выполняют следующим образом.

Нивелир устанавливают строго в створе между двумя рейками и измеряют превышения между точками установки реек при пяти положениях круглого уровня (рис.16) Наблюдения выполняют сериями, общее число которых равно пяти. Во всех сериях при каждом положении круглого уровня измеряют превышение по чёрной и красной сторонам реек. Перед новой серией изменяют высоту нивелира. В нивелировании III класса расстояние между рейками равно 100 м и 200 м (в нивелировании IV класса – 200 м). Если превышения, полученные при разных положениях круглого уровня, отличаются от начального превышения (пузырёк круглого уровня в нульпункте) более, чем на 3 мм (III класс) или на 5 мм (IV класс), то нивелир нельзя использовать для измерения превышений, а нужно сдать его в мастерскую для юстировки.

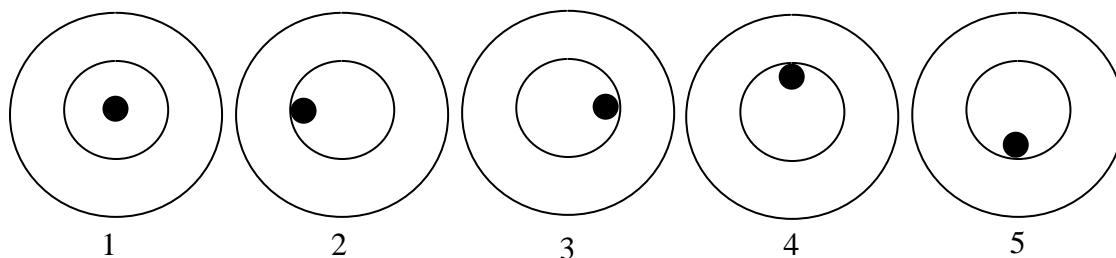


Рисунок 16 – Схема установки круглого уровня при исследовании компенсатора

Систематическую ошибку работы компенсатора для каждого наклона нивелира вычисляют по формуле

$$\sigma_k = \frac{h_i - h_0}{\nu},$$

где h_0 - превышение в миллиметрах при положении пузырька в нульпункте, h_i - превышение в миллиметрах при очередном наклоне нивелира, ν - диапазон наклона нивелира в минутах дуги;

затем подсчитывают среднее значение σ_k из четырёх.

Диапазон работы компенсатора определяют по максимальным наклонам нивелира, при которых работает компенсатор, а в отсчётах отсутствуют грубые ошибки. У нивелиров типа НЗ диапазон работы компенсатора должны быть не менее 15', ошибка самоустановки визирной линии трубы – 0,5", систематическая ошибка работы компенсатора – 0,3" на одну минуту наклона нивелира.

Время затухания колебаний определяют как интервал времени от лёгкого постукивания по корпусу нивелира до полного прекращения дрожания изображения рейки в поле зрения трубы нивелира. Оно не должно превышать двух секунд.

Устройство, проверки и исследования нивелирных реек

Для точного измерения превышений применяют рейки *РН-3* - деревянные, нескладные, двухсторонние, с сантиметровыми делениями. Для установки рейки в вертикальное положение на ней крепится круглый уровень; ось уровня должна быть параллельна продольной оси рейки. Эту поверку выполняют так: к рейке подвешивают отвес и устанавливают рейку вертикально по нити отвеса; при уклонении пузырька уровня от нуля исправительными винтами уровня приводят пузырек в нульпункт.

Поверхность рейки должна быть плоской; для проверки этого условия вдоль рейки натягивают нитку; просвет между ниткой и рейкой не должен быть больше 10 мм (для инварной рейки – 5 мм).

Перед началом полевых работ и после их окончания выполняют следующие исследования реек:

- проверка правильности нанесения дециметровых делений,
- контрольное определение средней длины метровых интервалов реек,
- определение разности высот нулей реек.

Для определения ошибок дециметровых делений и для измерения отдельных метровых интервалов используют металлическую контрольную линейку с ценой деления 0,2 мм. Методика этих исследований изложена в Инструкции по нивелированию [5]. Ошибки дециметровых делений рейки при нивелировании III класса не должны превышать 0,4 мм, IV класса – 0,6 мм.

При определении разности высот нулей реек на расстоянии около 15 м от нивелира забивают три колышка. На каждый колышек поочередно устанавливают обе рейки, и выполняют отсчёты по чёрной и красной сторонам реек. Повторяют все наблюдения на втором и третьем колышках. Эти действия составляют один приём; всего делают три приёма. Разность высот нулей вычисляют сначала для каждой рейки, а затем – для комплекта реек.

Кроме этого, у каждой рейки проверяют совпадение пятки рейки с осью нулевого штриха чёрной стороны рейки. Для этого с помощью контрольной линейки измеряют расстояние от плоскости пятки рейки до первого дециметрового штриха; для удобства отсчитывания к пятке рейки прикладывают лезвие безопасной бритвы. У деревянных реек *РН-3* несовпадение не должно превышать 0,5 мм.

Нивелирование III класса

Нивелирование III класса прокладывают внутри полигонов нивелирования I и II классов как отдельными ходами, так и в виде системы пересекающихся ходов с узловыми точками так, чтобы разделить каждый полигон II класса на 6 – 9 полигонов периметром 150 – 200 км.

Для обеспечения топографических съёмок масштаба 1 : 5 000 и крупнее линии нивелирования III класса прокладывают с расчётом создания полигонов периметром в среднем около 60 км.

Нивелирные ходы III класса прокладывают по одной паре колышков в прямом и обратном направлениях и по возможности с чётным числом станций в каждой секции. Закрепление линий нивелирования III класса производится постоянными реперами через 5 – 7 км.

Превышения измеряют либо по инварным штриховым рейкам нивелирами с оптическим микрометром по способу совмещений, либо по шашечным рейкам с отсчётами по средней нити.

Нивелиры и рейки должны удовлетворять условиям, перечисленным в Инструкции:

- увеличение трубы не менее 30^x (или 35^x);
- цена деления простого цилиндрического уровня не более 15", контактного – не более 30";
- угол i не более 10";
- цена деления круглого установочного уровня не более 12';
- ошибка метрового интервала штриховых реек не более 0,5 мм.

Для нивелирования III класса разрешается применять нивелиры *НЗ, НЗК, НЗКЛ, НВ1, НГ* и им соответствующие.

Шашечные рейки – трёхметровые двухсторонние с сантиметровыми делениями. На чёрных сторонах реек нули совпадают с пятками, а на красных сторонах с пятками совпадают отсчёты более 4000 мм, причём отсчёт на красной стороне одной рейки отличается от отсчёта на красной стороне другой рейки на 100 мм (например, на одной рейке отсчёт 4687, на другой – 4787).

В случае привязки к стенным маркам применяют подвесную рейку с такими же делениями, как и на основных рейках. Нуль на подвесной рейке должен быть совмещён с центром отверстия для штифта, на котором рейку подвешивают к стенной марке. При невозможности использования подвесной рейки применяют другие способы.

Нивелирование выполняют участками в (20 – 30) км. Переход от нивелирования в прямом направлении к нивелированию в обратном направлении делают только на постоянных реперах.

Нормальная длина визирного луча 75 м (при увеличении трубы более 35^x длина визирного луча может достигать 100 м).

Неравенство плеч на станции не более 2 м, накопление по секции не более 5 м.

Высота визирного луча над препятствиями должна быть не менее 0,3 м (отсчёт по чёрным сторонам реек должен быть больше 0300).

Нивелирование выполняют при хорошей видимости и спокойных изображениях реек. В солнечные дни не следует нивелировать в периоды, близкие к восходу и заходу солнца. При работе на станции нивелир защищают от солнечных лучей топографическим зонтом. Рейки устанавливают по уровню на костыли или башмаки; в местах установки башмаков предварительно снимают дёрн. На рыхлых или заболоченных участках рейки устанавливают на забитые в землю деревянные колья с вбитыми в их торцы гвоздями с полусферическими головками. На заболоченных грунтах рекомендуется применять нивелиры с компенсаторами; под ножки штатива необходимо забивать деревянные колья.

Последовательность наблюдений на станции нивелирования III класса:

1. Чёрная сторона задней рейки – элевационным винтом привести пузырёк уровня в нульпункт, взять отсчёт по средней нити ЧЗ (1) и затем – по дальномерным нитям (2) и (3).

2. Чёрная сторона передней рейки – элевационным винтом привести пузырёк уровня в нульпункт и взять отсчёт по средней нити ЧП (4) и затем – два отсчёта по дальномерным нитям (5) и (6).

3. Красная сторона передней рейки – элевационным винтом привести пузырёк уровня в нульпункт и взять отсчёт по средней нити ПК (7);

4. Красная сторона задней рейки – элевационным винтом привести пузырёк уровня в нульпункт и взять отсчёт по средней нити КЗ (8).

Все записи делаются в журнале установленной формы (таблица 3).

Таблица 3 – Форма журнала нивелирования III класса

Номер штатива и реек	Зарисовка привязки	Отсчёты по дальномерным нитям		Контроль н.п. превышения	Наблюдения по средней нити			Среднее превышение
		Задняя	Передняя		Задняя	Передняя	Превышения	
1 1 - 2		1572	1812	- 240	1739	1971	-232	-231,5 (19)
		(2)	(5)	(11)	(1)	(4)	(14)	
		1904	2130	- 226	6430	6761	-331	
		(3)	(6)	(12)	(8)	(7)	(15)	
		332 (9)	318	+14/+14	4691	4790	+ 99	
		(10)	(10)	(13)	(16)	(17)	(18)	

В нивелирах с компенсатором перед взятием отсчётов по рейке слегка постукивают пальцем по корпусу нивелира для того, чтобы убедиться, что компенсатор не "зависает". Для наблюдений на станции существует несколько допусков:

- уклонение фактической разности отсчётов по красной и черной сторонам рейки не должно отличаться от разности высот нулей рейки более 3 мм,
- разность превышений по черным и красным сторонам реек не должна превышать 3 мм с учётом разности высот нулей реек,

- среднее из отсчетов по дальномерным нитям не должно отличаться от отсчета по средней нити больше 3 мм.

Если какой-либо из этих допусков не выполняется, то наблюдения на станции необходимо повторить, предварительно изменив высоту прибора не менее, чем на три сантиметра.

Контроль по секции $\left| \sum h_{\text{прям}} + \sum h_{\text{обр}} \right| \leq 10 \text{ мм} \cdot \sqrt{L}$. Если это условие не выполняется, то делают ещё один ход, и, если превышения по всем трём ходам различаются не более, чем на $15 \text{ мм} \cdot \sqrt{L}$, то в обработку берут все три хода; если один ход явно неудовлетворительный, то его отбраковывают.

Перечислим инструментальные ошибки, сопровождающие процесс измерения превышений на станции:

- ошибка приведения визирной линии трубы в горизонтальное положение

$$m_z = \frac{m_{\text{ур}}''}{\rho''} \cdot S_{(\text{мм})},$$

где $m_{\text{ур}}$ - ошибка установки уровня в нуль пункт ($m_{\text{ур}} \approx 3''$); при расстоянии от нивелира до рейки $S = 100 \text{ м} = 100000 \text{ мм}$ $m_z \approx 1,5 \text{ мм}$.

- ошибка от несоблюдения главного условия нивелира; при равенстве расстояний от нивелира до задней и передней реек на станции она исключается,

- ошибка из-за неправильного хода фокусирующей линзы; для исключения этой ошибки рекомендуется не менять фокусировку при наблюдении задней и передней реек,

- ошибка недокомпенсации наклона зрительной трубы у нивелиров с компенсатором; для ослабления этой ошибки следует соблюдать определенный порядок приведения пузырька установочного уровня в нульпункт,

- ошибка в отсчете по рейке из-за ограниченной разрешающей способности трубы

$$m_p = \frac{60'' \cdot S}{\rho \cdot V},$$

где: S - расстояние от нивелира до рейки, V - увеличение трубы; при $S = 75 \text{ м}$ и $V = 30^x$ $m_p = 0,75 \text{ мм}$,

- ошибка из-за наклона рейки; при установке рейки по уровню эта ошибка очень мала (меньше $0,01 \text{ мм}$), и ею можно пренебречь,

- ошибка взятия отсчета по рейке; по результатам специальных исследований эта ошибка оценивается величиной $0,8 \text{ мм}$,

Далее перечислим ошибки из-за влияния внешних условий:

- ошибка из-за влияния рефракции; для ослабления этой ошибки рекомендуется измерять превышения в периоды хорошей видимости и четких изображений,

- ошибка из-за вертикальных перемещений костылей и башмаков,

- ошибка из-за неустойчивости штатива; на слабых грунтах рекомендуется снимать дерн или устанавливать ножки штатива на деревянные колья, забитые в землю на глубину $0,2 - 0,4 \text{ м}$.

Расчет суммарной ошибки одного отсчета по рейке при нивелировании III класса дает результат около $1,1 \text{ мм} - 1,2 \text{ мм}$; ошибка среднего превышения на станции оценивается такой же величиной. При расстоянии от нивелира до реек около 75 м на один километр хода будет семь станций, и при двойном ходе средняя квадратическая ошибка превышения на один километр хода получается равной

$$m_{\text{км}} = 1,2 \text{ мм} \cdot \sqrt{7/2} = 2,3 \text{ мм}.$$

Перечислим особенности выполнения нивелирования в городах. Если территория города по площади превышает 500 квадратных километров, то на его территории развивается нивелирная сеть I класса, которая сгущается нивелированием II, III, IV классов. Если площадь города находится в пределах $50 \div 500$ квадратных километров, то на ней развивается сеть нивелирования II класса, а сгущение выполняют нивелированием III и IV классов. При площади города $10 \div 50$ квадратных километров на территории города развивается сеть нивелирования III класса, а сгущение выполняют нивелированием IV класса. Если площадь города или другого населённого пункта меньше 10 квадратных километров, то на его территории развивается сеть нивелирования IV класса. Длины нивелирных линий (ходов) III класса между узловыми реперами не должны превышать 10

км (в незастроенной части города – 15 км). Как правило, нивелирные линии III класса параллельны одна другой, и через 5 км (на незастроенной части – 8 км) должны связываться между собой. Периметр полигонов нивелирования III класса в городах $25 \div 40$ км, в среднем около 30 км. Реперы на нивелирных линиях III и IV классов закладывают не реже, чем через 300 м (на незастроенной части – через 500 ÷ 2000 м).

ОБРАБОТКА НИВЕЛИРОВАНИЯ III КЛАССА

Обработка нивелирного хода III класса

Разомкнутый нивелирный ход начинается на репере с известной отметкой $H_{нач}$ (начальный исходный репер) и заканчивается на репере с известной отметкой $H_{кон}$ (конечный исходный репер); ход включает t реперов с неизвестными отметками и состоит из n секций (секцией называется часть хода между соседними реперами); таким образом, $n - t = 1$ (рис.17).

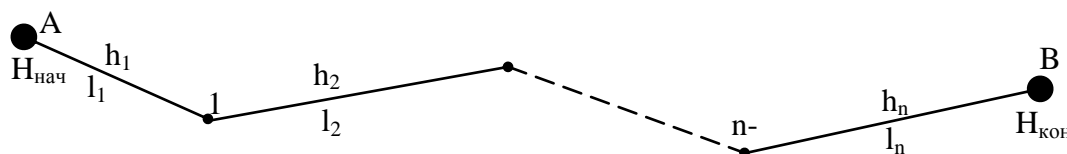


Рисунок 17 – Схема разомкнутого нивелирного хода

Введем следующие обозначения элементов нивелирного хода:

n - количество секций в ходе,

l_i - длина i -той секции,

$l_{ин}$ - расстояние от начального исходного репера до репера с номером i ,

$l_{ик}$ - расстояние от репера с номером i до конечного исходного репера,

k_i - количество станций на i -той секции,

L - длина всего хода, $L = \sum l_i$,

K - общее количество станций в ходе, $K = \sum k_i$,

$h_{i(пр)}$ - измеренное превышение по i -той секции в прямом ходе,

$h_{i(обр)}$ - измеренное превышение по i -той секции в обратном ходе,

$h_{i(ср)}$ - измеренное среднее превышение по i -той секции,

d_i - разность измеренных превышений на i -той секции, $d_i = h_{i(пр)} + h_{i(обр)}$,

V_{hi} - поправка в среднее превышение по i -той секции,

f_h - высотная невязка хода,

$m_{км}$ - средняя квадратическая ошибка измеренного превышения на 1 км хода,

H_i - отметка i -того репера,

P_{H_i} - вес отметки i -того репера,

M_{H_i} - средняя квадратическая ошибка отметки i -того репера.

Обработку измерений в нивелирном ходе III класса выполняют в следующем порядке:

1. Вычисляют средние превышения по секциям

$$h_{i(ср)} = \frac{1}{2} \cdot (h_{i(пр)} - h_{i(обр)}),$$

Контролируют правильность вычислений средних превышений по формуле

$$\sum h_{i(ср)} = \frac{1}{2} \cdot (\sum h_{i(пр)} - \sum h_{i(обр)}).$$

2. Вычисляют высотную невязку хода

$$f_h = \sum h_{i(cp)} - (H_{кон} - H_{нач})$$

и сравнивают ее с допустимым значением

$$f_{h(дон)} = 10 \text{ мм} \cdot \sqrt{L_{(км)}}.$$

3. Вычисляют поправки в средние превышения

$$V_{hi} = -\frac{f_h}{L} \cdot l_i.$$

4. Вычисляют исправленные значения средних превышений и контролируют правильность их вычислений

$$h_{i(испр)} = h_{i(cp)} + V_{hi},$$

$$\sum h_{i(испр)} = H_{кон} - H_{нач}.$$

5. Вычисляют уравненные отметки определяемых реперов

$$H_i = H_{i-1} + h_{i(испр)},$$

начиная с начального репера, у которого $i = 0$, и заканчивая на конечном исходном репере, вычисленная отметка которого должна быть в точности равна заданной отметке $H_{кон}$.

6. Вычисляют среднюю квадратическую ошибку превышения на 1 км хода дважды

$$m_{км} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\frac{d_i^2}{l_i}}{n}} \quad \text{и} \quad m_{км} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{[d_i^2]}{L}},$$

7. Вычисляют веса отметок определяемых реперов

$$P_{H_i} = \frac{L}{[l_{iH}] \cdot [l_{iK}]}.$$

8. Вычисляют среднюю квадратическую ошибки отметок определяемых реперов

$$m_{H_i} = \frac{m_{км}}{\sqrt{P_{H_i}}}.$$

Теоретическое обоснование операций 6, 7 и 8 дается в ТМОГИ (теории математической обработки геодезических измерений).

В ТМОГИ разработано несколько способов строгой и упрощенной совместной обработки групп измерений. Основным способом строгой обработки является МНК – метод наименьших квадратов; теория МНК была разработана в самом начале XIX века независимо двумя учёными: французским математиком А. М. Лежандром в работе “Новые методы определения кометных орбит” (1806 год) и немецким учёным К. Ф. Гауссом в работе “Теория движения небесных тел, обращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям” (1809 год). Практическое применение МНК было осуществлено К.Ф. Гауссом в 1801 году при расчёте орбиты только что открытой малой планеты Церера по результатам наблюдений за этой планетой.

Существуют две разновидности МНК: параметрический способ уравнивания и коррелятный способ уравнивания; разработаны и комбинированные способы – параметрический способ с дополнительными условиями и коррелятный способ с дополнительными неизвестными. Последние два десятилетия в России издаются в основном учебники по ТМОГИ профессора Ю. И. Маркузе.

Приведённый выше алгоритм обработки нивелирного хода является частным случаем коррелятного способа уравнивания при одном избыточном измерении.

Понятие о коррелятном способе уравнивания

Пусть выполнено n измерений, и результаты этих измерений L_1, L_2, \dots, L_n имеют известные веса p_1, p_2, \dots, p_n . Поскольку результаты измерений неизбежно содержат некоторые ошибки, в результате уравнивания получатся так называемые уравненные значения измерений y_1, y_2, \dots, y_n , причём $y_i = L_i + V_i$; здесь через V_i обозначена поправка

в i -тое измерение. В МНК поправки в измерения находятся под условием $[p \cdot V \cdot V] = \min$; это и есть математическая запись принципа наименьших квадратов.

Сначала нужно составить условные уравнения связи

$$\varphi_1(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$$

$$\varphi_2(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$$

.....

$$\varphi_r(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$$

Число таких уравнений будет равно количеству избыточных измерений $r = n - t$, где t - количество определяемых неизвестных. Условным уравнениям связи удовлетворяют истинные значения измеренных величин, однако, и уравненные значения измерений должны удовлетворять этим условиям. Например, если измерить в треугольнике все три угла и обозначить истинные значения углов через $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, а уравненные значения углов через $\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n$, то должны выполняться условия: $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = 180^\circ$ и $\beta'_1 + \beta'_2 + \dots + \beta'_n = 180^\circ$.

Если в уравнения связи поставить результаты измерений, то они не будут выполняться, так как их правые части не будут равны нулю

$$\varphi_1(L_1, L_2, \dots, L_n) = w_1$$

$$\varphi_2(L_1, L_2, \dots, L_n) = w_2$$

.....

$$\varphi_r(L_1, L_2, \dots, L_n) = w_r$$

В правой части каждого уравнения находится так называемая невязка условного уравнения.

Если уравнения связи нелинейны относительно измерений, то сначала их нужно привести к линейному виду $\varphi_i(L_1 + V_1, L_2 + V_2, \dots, L_n + V_n) = 0$, для чего нужно разложить каждое условие в ряд Тейлора и сохранить в них только члены первого порядка

разложения $\varphi_i(L_1, L_2, \dots, L_n) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial L_1} \cdot V_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial L_2} \cdot V_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial L_n} \cdot V_n = 0$.

Обозначим $\frac{\partial \varphi_1}{\partial L_i} = a_i$, $\frac{\partial \varphi_2}{\partial L_i} = b_i$, ..., $\frac{\partial \varphi_r}{\partial L_i} = r_i$ и получим систему уравнений

$$a_1 \cdot V_1 + a_2 \cdot V_2 + \dots + a_n \cdot V_n + w_1 = 0$$

$$b_1 \cdot V_1 + b_2 \cdot V_2 + \dots + b_n \cdot V_n + w_2 = 0$$

.....

$$r_1 \cdot V_1 + r_2 \cdot V_2 + \dots + r_n \cdot V_n + w_r = 0$$

Эти уравнения называются уравнениями поправок; они линейны относительно поправок в измерения и могут быть решены каким-либо методом, разработанным в математике. В процессе решения этой системы уравнений находят поправки V_i ; затем вычисляют уравненные значения измеренных величин и, пользуясь математическими зависимостями в конкретном геодезическом построении, вычисляют любые её элементы (для нивелирных сетей – это отметки определяемых реперов, для плановых сетей – это координаты определяемых пунктов).

Поскольку количество уравнений поправок r всегда меньше количества поправок n , то система уравнений поправок не имеет решения, но, приписав к этой системе условие $[p \cdot V \cdot V] = \min$, получим известную в математике задачу на условный экстремум. Задача решается через нахождение вспомогательных множителей Лагранжа, называемых

коррелатами и обозначаемых k_i ; количество коррелат равно r . Поправки V_i выражаются через коррелаты следующим образом

$$V_i = \pi_i \cdot (a_i \cdot k_1 + b_i \cdot k_2 + \dots + r_i \cdot k_r);$$

здесь через π_i обозначен обратный вес i -того измерения $\pi_i = \frac{1}{p_i}$.

Значения коррелат находятся из решения так называемых нормальных уравнений коррелат; количество нормальных уравнений равно количеству коррелат r

$$[\pi \cdot a \cdot a] \cdot k_1 + [\pi \cdot a \cdot b] \cdot k_2 + \dots + [\pi \cdot a \cdot r] \cdot k_r + w_1 = 0$$

$$[\pi \cdot b \cdot a] \cdot k_1 + [\pi \cdot b \cdot b] \cdot k_2 + \dots + [\pi \cdot b \cdot r] \cdot k_r + w_2 = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$[\pi \cdot r \cdot a] \cdot k_1 + [\pi \cdot r \cdot b] \cdot k_2 + \dots + [\pi \cdot r \cdot r] \cdot k_r + w_r = 0$$

Решение нормальных уравнений можно выполнять по разному: при ручном счёте – по алгоритму Гаусса или методом квадратных корней, при машинном счёте – методом обращения матрицы коэффициентов нормальных уравнений.

Контролем правильности решения нормальных уравнений является выполнение условия $[p \cdot V \cdot V] = -[k \cdot w]$; также проверяются исходные уравнения связи $\varphi_i(L_1 + V_1, L_2 + V_2, \dots, L_n + V_n) = 0$.

Оценку точности выполняют в два этапа: сначала вычисляют среднюю квадратическую ошибку единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{[p \cdot V \cdot V]}{n - r}}$$

и затем - среднюю квадратическую ошибку любой функции измеренных величин

$$m_F = \mu \cdot \sqrt{\frac{1}{p_F}};$$

вес функции p_F вычисляют для каждой функции отдельно.

В матричной записи теория коррелатного способа МНК-уравнивания имеет следующий вид. Система уравнений поправок записывается в виде матричного уравнения

$$A_{rn} \cdot V_{n1} + W_{r1} = 0;$$

здесь A_{rn} - матрица коэффициентов уравнений поправок размером rn (r строк и n столбцов); V_{n1} - вектор поправок размером $n1$ (n строк, 1 столбец); W_{r1} - вектор невязок размером $r1$ (r строк, 1 столбец).

Условие минимума суммы квадратов поправок записывается так $V_{n1}^T \cdot P_{nn} \cdot V_{n1} = \min$.

Система нормальных уравнений коррелат имеет вид

$$N_{rr} \cdot K_{r1} + W_{r1} = 0,$$

где N_{rr} - матрица коэффициентов нормальных уравнений коррелат, $N_{rr} = A_{rn} \cdot \Pi_{nn} \cdot A_{rn}^T$;

Π_{nn} - матрица обратных весов измеренных элементов, $\pi_i = \frac{1}{p_i}$; K_{r1} - вектор коррелат размером $r1$. Поправки в измерения выражаются через коррелаты по формуле

$$V_{n1} = \Pi_{nn} \cdot A_{rn}^T \cdot K_{r1}.$$

Применим изложенную теорию коррелатного способа уравнивания к уравниванию нивелирного хода.

Веса измеренных превышений h_1, h_2, \dots, h_n вычисляют по длине секций $p_i = \frac{1}{l_i}$; эта

формула получается из следующих рассуждений: за ошибку единицы веса μ_0 примем ошибку измерения превышения на пути в 1 км и обозначим среднюю квадратическую ошибку i -того превышения через m_i , тогда имеем последовательно

$$p_i = \frac{\mu_0^2}{m_i^2}, \quad m_i = \mu_0 \cdot \sqrt{l_i}, \quad p_i = \frac{\mu_0^2}{\mu_0^2 \cdot l_i} = \frac{1}{l_i}.$$

Иногда за ошибку единицы веса принимают среднюю квадратическую ошибку измерения превышения на пути в C километров; тогда $p_i = \frac{C}{l_i}$. Если принять $C = l_{cp}$, то в этом случае различия весов измеренных превышений будут наименьшими, что в теории уравнивания играет положительную роль.

В нивелирном ходе всего одно условие

$$(h_1 + V_1) + (h_2 + V_2) + \dots + (h_n + V_n) - (H_{кон} - H_{нач}) = 0,$$

которое линейно относительно поправок V_i , поэтому условное уравнение поправок будет

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n + w_1 = 0;$$

невязка w_1 подсчитывается по формуле

$$w_1 = \sum h_{изм} - \sum h_{теор} = h_1 + h_2 + \dots + h_n - (H_{кон} - H_{нач}).$$

Сначала выразим обратные веса через длины секций $\pi_i = l_i$ и $[\pi] = \sum l_i = L$.

Затем напишем нормальное уравнение одной корреляты и учтём, что $w_1 = f_h$,

$$[\pi \cdot a \cdot a] \cdot k_1 + f_h = 0,$$

откуда $k_1 = -\frac{f_h}{[\pi \cdot a \cdot a]} = -\frac{f_h}{[\pi]} = -\frac{f_h}{L}$, так как $a_i = \pm 1$, и $V_i = -\frac{f_h}{L} \cdot l_i$.

Уравненные значения измеренных превышений вычисляем по формуле $h_{i,успр} = h_i + V_i$, затем вычисляем уравненные значения отметок определяемых реперов

$$H_i = H_{i-1} + h_{i,успр}.$$

При уравнивании нивелирного хода III класса следует учесть, что в нём превышения по секциям измеряются дважды - в прямом и обратном направлениях, поэтому

$$h_i = \frac{1}{2} \cdot (h_{np} - h_{обр});$$

в этой формуле учтено, что прямое превышение h_{np} и обратное превышение $h_{обр}$ имеют противоположные знаки, а при вычислении среднего превышения ему приписывают знак прямого превышения. Кроме того, вычисляют расхождения прямого и обратного превышений $\delta_{h_i} = (h_{np} + h_{обр})$ и сравнивают их с допустимыми значениями

$$\delta_{h_i, доп} = 10 \text{ мм} \cdot \sqrt{l_i}.$$

Оценка точности нивелирного хода III класса выполняется по формулам

$$P_{H_i} = \frac{L}{[l_{iH}] \cdot [l_{iK}]}, \quad m_{км} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{d^2}{n}}, \quad m_{км} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[d^2]}{[l]}}, \quad m_{H_i} = \frac{m_{км}}{\sqrt{P_{H_i}}},$$

$$m_{m_{км}} = \frac{m_{км}}{\sqrt{2n}}, \quad m_{m_{H_i}} = \frac{m_{км}}{\sqrt{P_{H_i}}}.$$

Приведём вывод формулы веса уравненной отметки репера. Отметку репера можно вычислить дважды: от начального исходного репера и от конечного исходного репера; затем из этих двух значений следует взять средне-весовое, вес которого будет равен сумме весов этих двух отметок.

Вес первой отметки вычисляется по формуле

$$p_1 = \frac{1}{[l]_1^i};$$

в знаменателе стоит расстояние от начального исходного репера до определяемого репера.

Вес второй отметки вычисляется по формуле

$$p_2 = \frac{1}{[l]_{i+1}^n};$$

в знаменателе стоит расстояние от конечного исходного репера до определяемого репера.

Далее пишем

$$P_{H_i} = p_1 + p_2 = \frac{[l]_1^i + [l]_{i+1}^n}{[l]_1^i \cdot [l]_{i+1}^n} = \frac{L}{[l]_1^i \cdot [l]_{i+1}^n}.$$

Обработка нивелирного хода III класса выполняется в специальной ведомости, форма которой приведена в “Лабораторном практикуме” по геодезии.

Обработка нивелирной сети с одной узловой точкой

В связи с широким внедрением компьютеров в практику геодезических вычислений исчезла актуальность "ручных" способов обработки сложных нивелирных сетей, и в настоящее время обработка нивелирных сетей выполняется на ПК по программам, в которых реализованы алгоритмы строгого МНК-уравнивания.

Из применяемых в прежние времена "ручных" способов: - способ эквивалентной замены, способ узлов, способ полигонов, - особый теоретический интерес представляет первый способ, в котором путем несложных вычислений нивелирная сеть с несколькими узловыми точками может быть преобразована в сеть с одной узловой точкой. В способе узлов и способе полигонов уравнивание выполняется методом приближений; оба они были разработаны русским учёным геодезистом В.В. Поповым.

Пусть в репере I сходятся n ходов; длины ходов обозначим через l_i , измеренные превышения по ним - через h_i (рис.18). Отметку репера I можно получить n раз (на рис.18 $n = 4$):

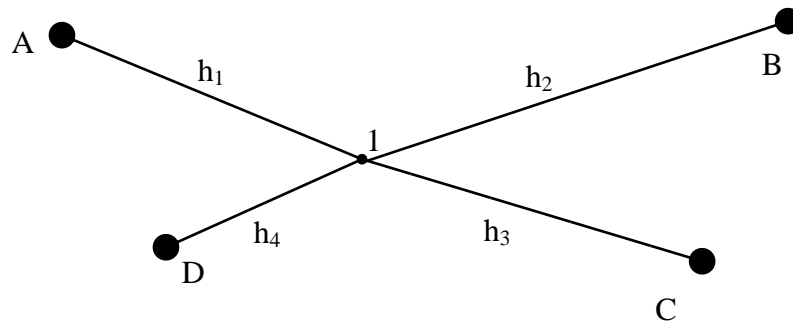


Рисунок 18 – Схема нивелирной сети с одной узловой точкой

$$H_1^{(1)} = H_A + h_1 \quad - \text{из 1-го хода,}$$

$$H_1^{(2)} = H_B + h_2 \quad - \text{из 2-го хода,}$$

$$H_1^{(3)} = H_C + h_3 \quad - \text{из 3-го хода,}$$

$$H_1^{(4)} = H_D + h_4 \quad - \text{из 4-го хода.}$$

При разной длине ходов l_i ошибки превышений по ходам также различны, следовательно, отметки $H_1^{(i)}$ будут получены с разными весами, и для вычисления средней отметки репера I нужно применить формулу весового среднего

$$H_1^{(cp)} = \frac{\sum (p_i \cdot h_i)}{\sum p_i},$$

где p_i - вес i -того хода; $p_i = \frac{C}{l_i}$ (C - константа).

После вычисления $H_1^{(cp)}$ сеть разделяется на четыре изолированных одиночных хода, каждый из которых обрабатывается по известной методике.

Обработка нивелирной сети по способу эквивалентной замены

Идея способа эквивалентной замены заключается в том, что два нивелирных хода, сходящихся в одной точке, можно заменить одним эквивалентным ходом, вес которого

равен сумме весов составляющих его двух ходов, и превышение по которому равно средне-весовому из превышений двух ходов. Рассмотрим нивелирную сеть, изображенную на рис.19.

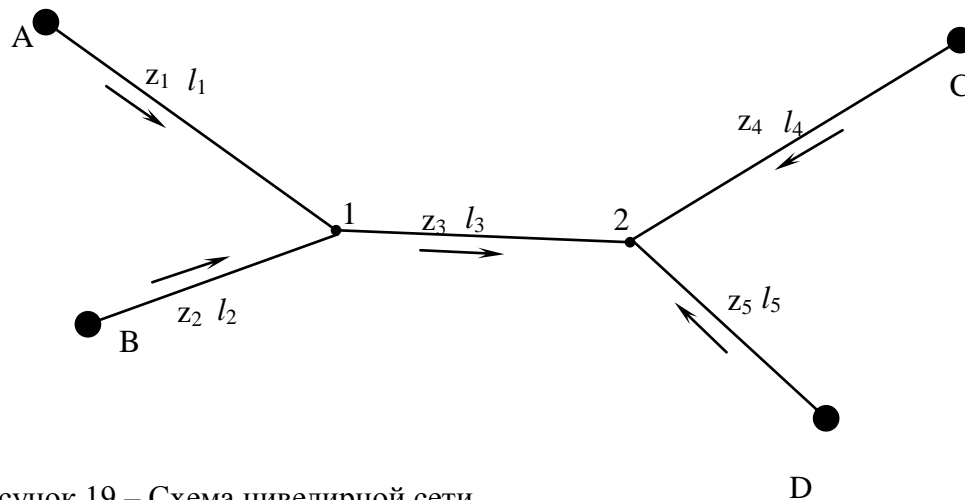


Рисунок 19 – Схема нивелирной сети

Сначала заменим ходы 1 и 2 одним эквивалентным ходом z_{12} , вес которого равен

$$p_{z_{12}} = p_1 + p_2 = \frac{C}{l_1} + \frac{C}{l_2}.$$

Длину хода z_{12} выразим через длины ходов 1 и 2

$$l_{z_{12}} = \frac{l_1 \cdot l_2}{l_1 + l_2}.$$

Отметка репера 1, вычисленная по превышениям ходов 1 и 2 или из эквивалентного хода z_{12} , будет равна

$$H_1^{(z_{12})} = \frac{(H_A + h_1) \cdot p_1 + (H_B + h_2) \cdot p_2}{p_1 + p_2}$$

После первой замены вид сети изменится (рис.20).

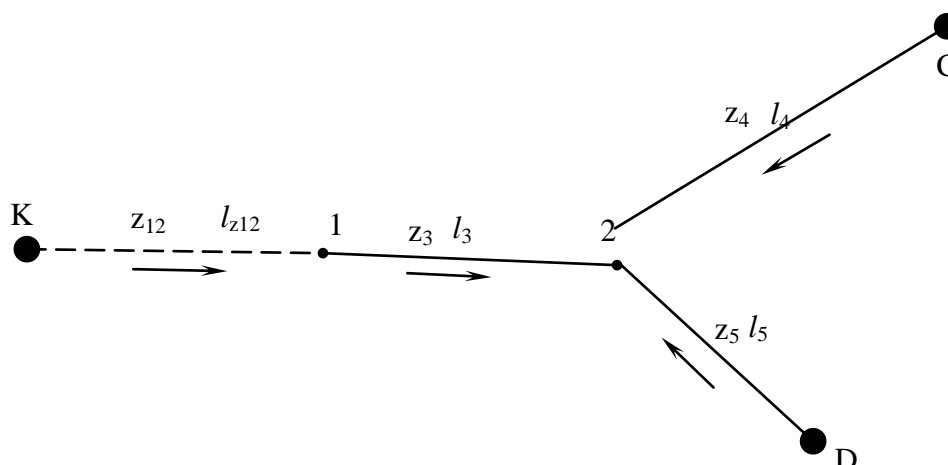


Рисунок 20 – Вид нивелирной сети после первой замены

Следующим шагом будет "сложение" хода z_{12} с ходом 3; эквивалентный им ход обозначим z_{123} ; его длина будет

$$l_{z_{123}} = l_{z_{12}} + l_3.$$

Отметка репера 2, полученная из ходов 1, 2, 3 или из эквивалентного хода z_{123} , будет равна

$$H_2^{(z_{123})} = H_1^{(z_{12})} + h_3.$$

Вес отметки репера 2, полученной из эквивалентного хода z_{123} , будет равен

$$p_{z_{123}} = \frac{C}{l_{z_{123}}}.$$

Вид нивелирной сети после второй эквивалентной замены изображён на рис.21.

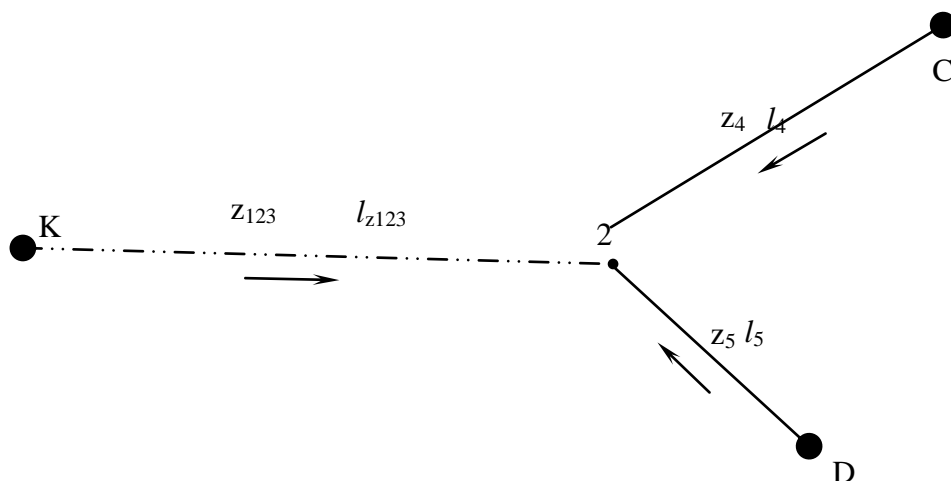


Рисунок 21 – Схема нивелирной сети после второй замены

В узловой точке - репере 2, - сходятся три хода, и дальнейшая обработка сети выполняется по методике обработки нивелирной сети с одной узловой точкой, описанной выше, то есть,

$$p_5 = \frac{C}{l_5}, \quad p_4 = \frac{C}{l_4}, \quad H_2^{(5)} = H_D + h_5, \quad H_2^{(4)} = H_C + h_4, \quad P_{H_2} = p_{z_{123}} + p_5 + p_4.$$

$$H_2^{(cp)} = \frac{H_2^{(z_{123})} \cdot p_{z_{123}} + H_2^{(5)} \cdot p_5 + H_2^{(4)} \cdot p_4}{p_{z_{123}} + p_5 + p_4}.$$

Поправки V_i в измеренные превышения получают по следующим формулам

$$V_4 = (H_2^{(cp)} - H_C) - h_4; \quad V_5 = (H_2^{(cp)} - H_D) - h_5; \quad V_{z_{123}} = H_2^{(cp)} - H_2^{(z_{123})};$$

$$V_{z_{12}} = V_{z_{123}} \cdot \frac{l_{z_{12}}}{l_{z_{123}}}; \quad V_3 = V_{z_{123}} \cdot \frac{l_3}{l_{z_{123}}}; \quad V_2 = V_{z_{12}} \cdot \frac{l_2}{l_{z_{12}}}; \quad V_1 = V_{z_{12}} \cdot \frac{l_1}{l_{z_{12}}}.$$

Оценка точности уравненной нивелирной сети заключается в вычислении средней квадратической ошибки единицы веса μ , средней квадратической ошибки превышения на один километр хода $m_{км}$ и ошибок отметок реперов M_{H_j}

$$\mu^2 = \frac{[p_i \cdot V_i^2]}{n - t},$$

$$m_{км}^2 = \frac{\mu^2}{C},$$

$$M_{H_2} = \mu \cdot \sqrt{\frac{1}{P_{H_2}}}.$$

В этих формулах: p_i - вес i -того хода; V_i - поправка из уравнивания в превышение по i -тому ходу; n - количество ходов в сети (количество измеренных превышений); t - количество определяемых реперов в сети; C - константа при вычислении весов, как правило $C = \frac{\sum l_i}{n}$; l_i - длина i -того хода; P_{H_2} - вес репера 2.

Чтобы получить вес репера 1, нужно уравнивать сеть заново, заменяя ходы 4 и 5 эквивалентным ходом и затем “складывая” ход 3 и полученный эквивалентный ход. В результате таких замен узловым репером, в котором будут сходить три хода, должен стать репер 1.

Для нивелирных сетей сложной формы разработаны методики эквивалентной замены “звезда - треугольник”, “треугольник - звезда” и другие. Как отмечается в литературе, такие замены интересны прежде всего с теоретической точки зрения, а практически они очень громоздки и неудобны, а потому способ эквивалентной замены рекомендуется применять для обработки или предрасчёта точности небольших по размерам и относительно простых по форме нивелирных сетей.

Обработка нивелирной сети по способу узлов

Рассмотрим ту же ниверную сеть (рис.18), в которой исходными данными являются отметки H_A, H_B, H_C, H_D реперов A, B, C, D , измерены пять превышений h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 по пяти ходам 1, 2, 3, 4 и 5; определяемыми данными являются отметки H_1, H_2 реперов 1 и 2.

Идея способа заключается в вычислении отметок H_1, H_2 по измеренным превышениям, сходящимся в реперах 1 и 2 соответственно

$$H_1 = \frac{(H_A + h_1) \cdot p_1 + (H_B + h_2) \cdot p_2 + (H_2 - h_3) \cdot p_3}{p_1 + p_2 + p_3},$$

$$H_2 = \frac{(H_C + h_4) \cdot p_4 + (H_D + h_5) \cdot p_5 + (H_1 + h_3) \cdot p_3}{p_3 + p_4 + p_5}.$$

Вес каждого хода подсчитывается по известной формуле

$$p_i = \frac{C}{l_i},$$

где l_i - длина хода в километрах, а C - средняя длина хода в сети (тоже в километрах).

При уравнивании сети по способу узлов удобнее пользоваться приведёнными весами

$$p'_i = \frac{p_i}{\sum p_i};$$

сумма приведённых весов на определяемом репере должна быть равна 1,000.

Поскольку отметки H_1 и H_2 неизвестны, то в первом приближении отметка H_1 вычисляется по неполной формуле – без третьего слагаемого в числителе и знаменателе; при вычислении отметки H_2 в первом приближении отметка H_1 берётся из первого приближения. При дальнейших приближениях каждый раз берётся последнее вычисленное значение той и другой отметок.

Приближения заканчиваются, когда различие обеих отметок H_1 и H_2 в последнем и предпоследнем приближениях (в общем случае всех определяемых отметок) не превышает один миллиметр.

Оценка точности в способе узлов затруднена из-за трудностей при определении весов уравненных отметок определяемых реперов. Поправки в первое измеренное превышение вычисляется по формуле $V_1 = H_{1(yp)} - H_A$, во второе – по формуле $V_2 = H_{2(yp)} - H_B$ и так далее. Затем вычисляется средняя квадратическая ошибка единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{[pV^2]}{n-t}}.$$

Веса отметок определяемых реперов можно вычислить по формулам В.П.Козлова; приближённо вес отметки определяемого репера равен сумме весов ходов, сходящихся в нём. Формулы В.П.Козлова предполагают вычисление весов отметок реперов двумя приближениями. В первом приближении вес отметки репера равен сумме весов нивелирных ходов, сходящихся в данном репере минус несколько поправочных членов; количество таких членов равно количеству нивелирных линий, сходящихся в репере, а каждый член равен дроби, в числителе которой стоит квадрат веса нивелирной линии, а в знаменателе – сумма весов нивелирных линий, сходящихся в репере на конце данной линии; если на конце линии находится исходный репер, то данный член равен нулю.

$$P_{H_1}' = p_1 + p_2 + p_3 - \frac{p_3^2}{p_3 + p_4 + p_5},$$

$$P_{H_2}' = p_3 + p_4 + p_5 - \frac{p_3^2}{p_1 + p_2 + p_3}.$$

Во втором приближении в знаменателе каждого члена вместо суммы весов нивелирных линий нужно поставить вес отметки репера в конце линии, полученный из первого приближения.

$$P_{H_1}'' = p_1 + p_2 + p_3 - \frac{p_3^2}{P_{H_2}'},$$

$$P_{H_2}'' = p_3 + p_4 + p_5 - \frac{p_3^2}{P_{H_1}'}.$$

Обработка нивелирной сети по способу полигонов

В способе полигонов, называемом также способом красных чисел, выполняется последовательное распределение невязок каждого полигона пропорционально весам нивелирных ходов, входящих в полигон. Этот способ соответствует решению нормальных уравнений коррелат в коррелятном способе уравнивания МНК методом последовательных приближений.

Сначала намечают замкнутые полигоны, количество которых должно быть равно количеству избыточных измерений в сети; при необходимости в полигон включают ход между исходными реперами, превышение по которому считается истинным и не получает поправку при уравнивании.

Затем для каждого полигона, вычисляют высотные невязки $f_h = \sum h_i$, где h_i - измеренные превышения по ходам полигона; знаки превышений должны соответствовать направлению, единому для всей нивелирной сети, например, по часовой стрелке. Кроме того, для всех ходов полигона подсчитывается так называемые красные числа по формуле

$$x_i = \frac{l_i}{[l_i]}; \quad l_i - \text{длина хода, } [l_i] - \text{периметр полигона (сумма длин всех ходов полигона);}$$

красные числа вычисляются до 0,001; сумма красных чисел в полигоне должна быть равна 1,000.

В каждом полигоне строят колонки: одну – для записи первичной невязки и приведённых невязок; и несколько колонок по числу ходов полигона – для записи поправок; эти колонки располагают за пределами полигона около каждой его стороны (рис.22). На этом рисунке сеть состоит из трёх исходных реперов, восьми нивелирных ходов и трёх определяемых реперов. Количество полигонов равно $r = 8 - 3 = 5$. В первом полигоне колонка невязок обозначена римской цифрой **I**; для трёх ходов полигона за его пределами построены три колонки поправок; все они обозначены арабской цифрой 1. Аналогичные построения выполнены и для остальных четырёх полигонов.

Обход полигонов начинают с полигона, невязка в котором имеет наибольшее значение, например, с полигона **I**; невязка этого полигона (-60мм) распределяется пропорционально красным числам трёх его ходов (0,250; 0,350; 0,400) и записывается в миллиметрах в колонки с обозначением 1. Затем переходят ко второму полигону; подсчитывается его приведённая невязка, равная первичной невязке и поправки, поступившей в полигон от невязки первого полигона (+45мм – 21мм = +24мм). Эта приведённая невязка (+24мм) распределяется в два хода и записывается в колонки поправок с обозначением 2. Дальнейшие действия выполняют по той же методике.

Выполнив первый обход, приступают ко второму обходу, в котором приведённые невязки подсчитываются как суммы поправок, поступивших в полигон при последнем распределении невязок. Как только приведённые невязки во всех полигонах станут равными нулю, процесс обхода заканчивается.

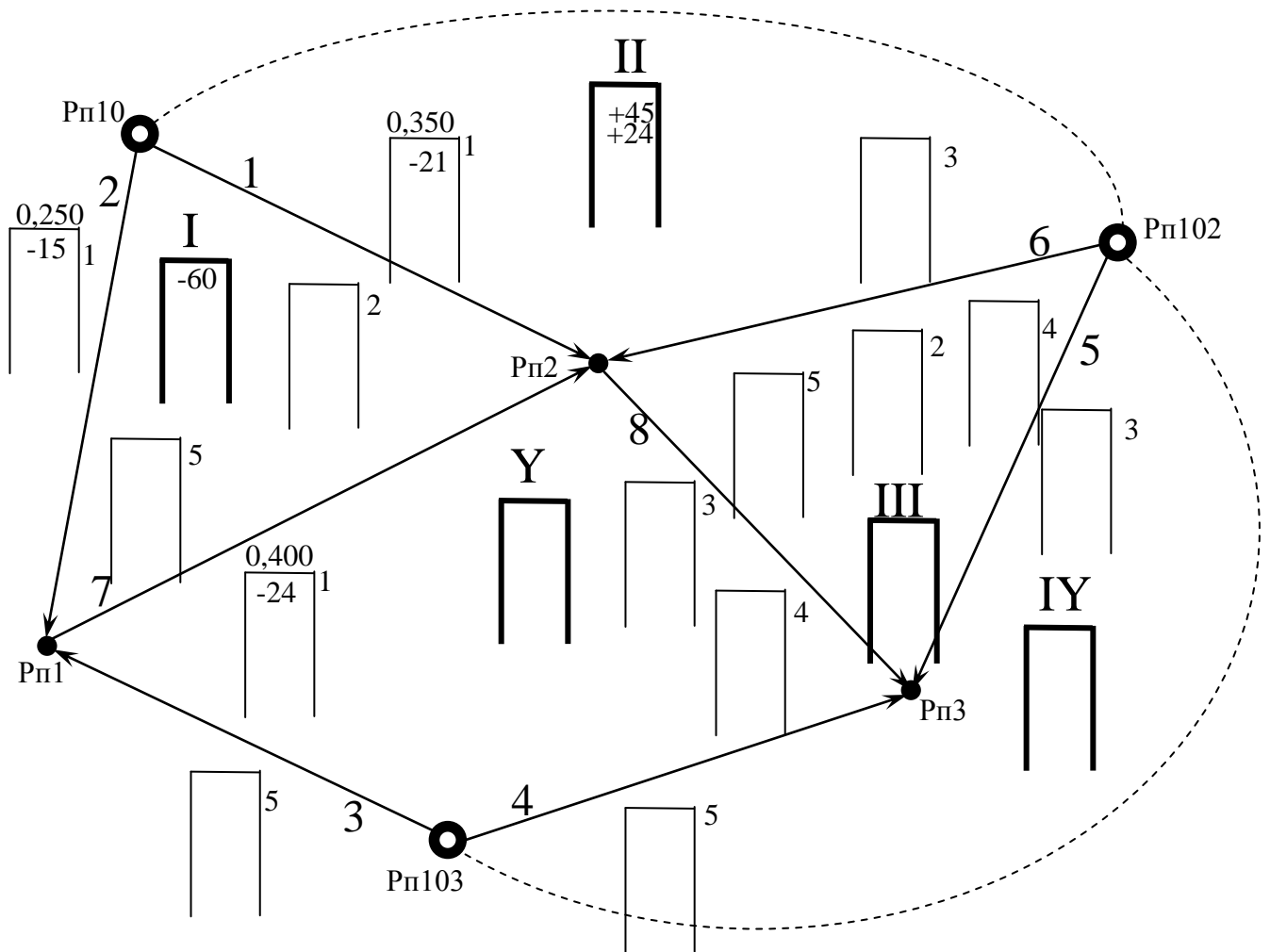


Рисунок 22 – Схема уравнивания нивелирной сети по способу полигонов

Поправка в измеренное превышение по ходу, входящему только в один полигон, равна сумме поправок в колонке данного хода; знак поправки зависит от направления хода и направления при вычислении невязок: при совпадении направлений знак поправки одинаков со знаком суммы, при противоположных направлениях знак поправки обратен знаку суммы.

Поправка в измеренное превышение по смежному ходу (входящему в два полигона) равна разности сумм поправок в двух колонках; знак поправки определяется по тому же правилу направлений.

После вычисления поправок в измеренные превышения заполняют таблицу вычисления отметок реперов, вычисляют среднюю квадратическую ошибку единицы веса, веса уравненных отметок реперов и их средние квадратические ошибки. Веса отметок реперов можно вычислить, как и в способе узлов, по формулам В.П.Козлова.

Обработка нивелирной сети параметрическим способом МНК

В параметрическом способе МНК-уравнения приняты следующие обозначения:

L_1, L_2, \dots, L_n - измеренные величины (превышения) с весами соответственно p_1, p_2, \dots, p_n ; количество измеренных превышений равно n ;

Y_1, Y_2, \dots, Y_n - уравненные значения превышений;

V_1, V_2, \dots, V_n - поправки из уравнивания к измеренным превышениям; связь уравненных превышений, поправок в измерения и измеренных превышений выражается формулой

$$Y_i = L_i + V_i;$$

X_1, X_2, \dots, X_t - определяемые неизвестные (отметки реперов); их количество равно t , причём $n > t$.

Далее выражают уравненные значения превышений в виде функций от определяемых неизвестных $Y_i = f_i(X_1, X_2, \dots, X_t)$ и вводят понятие приближённые значения определяемых неизвестных $X_1^0, X_2^0, \dots, X_t^0$; приближённые значения неизвестных можно либо вычислить каким-либо способом, либо принять произвольными, но так, чтобы отличие приближённых и уравненных значений неизвестных различались на малые величины δX . Значения неизвестных представляют в виде суммы $X_i = X_i^0 + \delta X_i$ и раскладывают функции f_i в ряд Тейлора относительно поправок δX , ограничиваясь членами первого порядка малости. Полученные таким образом уравнения называются параметрическими уравнениями поправок

$$a_i \cdot \delta X_1 + b_i \cdot \delta X_2 + \dots + t_i \cdot \delta X \cdot t + l_i = V_i.$$

В этой формуле буквами a_i, b_i, \dots, t_i обозначены частные производные функции f_i по определяемым неизвестным X_1, X_2, \dots, X_t . Свободный член l_i получается по формуле $l_i = f_i(X_1^0, X_2^0, \dots, X_t^0) - L_i$. Функция $F = [p \cdot V \cdot V] = \min$ представляется в виде

$$F = p_1 \cdot V_1^2 + p_2 \cdot V_2^2 + \dots + p_n \cdot V_n^2,$$

и для выполнения условия минимума функции приравнивают нулю n её частных производных по V_i .

На следующем этапе составляют t нормальных уравнений с t параметрами – поправками к приближённым значениям неизвестных. Из решения системы нормальных уравнений (по схеме Гаусса, методом квадратных корней или путём обращения матрицы коэффициентов) находят поправки δX к приближённым значениям неизвестных. Далее вычисляют уравненные значения неизвестных X , поправки в измерения, уравненные значения измеренных элементов и выполняют оценку точности. При оценке точности вычисляют ошибку единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{[p \cdot V^2]}{n - t}}$$

и сравнивают её с проектным значением ошибки единицы веса μ_0 ; затем для любого параметра геодезического построения вычисляют вес P_i и среднюю квадратическую ошибку уравненного значения этого параметра

$$m_i = \mu \cdot \sqrt{\frac{1}{P_i}}.$$

В нивелирных сетях значения всех частных производных измерений равны либо плюс единице, либо минус единице, либо нулю, так как превышение по линии равно разности отметок реперов в конце линии и в её начале

$$h_i = H_{кон} - H_{нач};$$

если один из реперов – начальный или конечный, - является исходным, то частная производная по его отметке равна нулю. Уравнения поправок содержат в левой части всего два члена (или один член) с неизвестными поправками в отметки реперов. Приближённые значения отметок вычисляют обычно по измеренным превышениям, начиная от исходных реперов, поэтому часть свободных членов параметрических уравнений поправок будут равны нулю.

В матричной записи параметрический способ МНК-уравнивания имеет вид

- параметрические уравнения поправок $A_{nt} \cdot \Delta X_{t1} + L_{n1} = V_{n1}$;
- нормальные уравнения параметров-поправок $N_{tt} \cdot \Delta X_{t1} + B_{t1} = 0_{t1}$;
- матрица коэффициентов нормальных уравнений $N_{tt} = A_{nt}^T \cdot P_{nn} \cdot A_{nt}$;
- вектор свободных членов нормальных уравнений $B_{t1} = A_{nt} \cdot P_{nn} \cdot L_{n1}$;
- вектор поправок к приближённым значениям неизвестных $\Delta X_{t1} = -N_{tt}^{-1} \cdot B_{t1}$.

В этих формулах:

L_{n1} - вектор свободных членов параметрических уравнений поправок,
 $l_i = f_i(X_1, X_2, \dots, X_t) - L_i$;
 P_{nn} - диагональная матрица весов измерений;
 A_{nt} - матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок размером n строк и t столбцов.
 V_{n1} - вектор поправок в результаты измерений.

Проектирование нивелирования III класса

Перед составлением проекта на нивелирование любого класса собирают и анализируют все материалы ранее выполненных нивелировок на территории проектируемых работ. Сведения об этих работах можно получить в территориальных инспекциях Госгеонадзора.

Проект составляется в соответствии с требованиями Инструкции по нивелированию и, если нивелирование III класса проектируется для обеспечения топографических съёмок масштаба 1:5000 и крупнее, то нужно учитывать ещё и требования Инструкции по топографическим съёмкам.

Проектирование выполняют на топографических картах масштаба 1:100 000 – 1:200 000 ; в случае необходимости проект уточняют в деталях на картах более крупных масштабов. На карту нужно нанести все выполненные ранее работы по нивелированию, а также все пункты триангуляции и полигонометрии; наносят также проектируемые пункты триангуляции и полигонометрии. В любом случае проектирование нивелирования III класса производится в пределах полигонов нивелирования II класса.

Желательно совмещать проектируемые линии нивелирования с ходами полигонометрии, прокладываемыми с целью развития и сгущения геодезических сетей.

Наиболее подробно разрабатывают проекты связи новых линий нивелирования с существующими линиями. Начало и конец проектируемой линии должны быть просто и надёжно связаны с существующими линиями более высокого или того же класса. Проектируемая линия должна быть надёжно связана с пересекаемыми ею линиями нивелирования всех классов. Связь проектируемых линий III и IV классов с существующими линиями I, II, III, IV классов осуществляется путём включения в ход одного репера существующей линии.

На каждый образуемый узел связи линий нивелирования составляют особую схему в достаточно крупном масштабе, на которой показывают направления всех связываемых линий и существующие реперы, подлежащие включению в проектируемую линию.

В соответствии с конкретными климатическими и почвенными условиями района работ из сборника “Типы центров” выбирают конструкции реперов проектируемых линий.

Нивелирование через водные препятствия проектируют в наиболее узких местах с использованием мелей и островов. Если ширина водного препятствия превышает 150 метров, то на обоих берегах предусматривают закладку реперов – по одному на каждом берегу. Каждый репер по возможности намечают в незатопляемой зоне; превышение между этими реперами не должно быть больше 0,5 м.

При проектировании высотной основы морских уровенных и основных речных постов следует помнить, что уровеньный пост должен быть оборудован не менее, чем тремя реперами: двумя основными (один из них фундаментальный) и одним рабочим. Основные реперы служат для проверки положения рабочего репера и для закрепления нуля поста. В качестве основных реперов используют реперы, находящиеся не далее 3 км от поста. Рабочий репер, предназначенный для систематического контрольного нивелирования измерительных устройств, располагают в непосредственной близости от этих устройств и вне зоны затопления высокими водами.

Нивелирование через водные препятствия шириной до 200 м выполняют по обычной методике двумя приёмами с соблюдением равенства расстояний до задней и передней реек. Между приёмами изменяют высоту нивелира на (3 – 5) см. Расхождение превышений между приёмами допускается 4 мм для III класса и 7 мм для IV класса.

При ширине препятствия (200 – 400) м нивелирование выполняют нивелиром с плоскопараллельной пластинкой способом совмещений; при этом применяют особые

щитки на рейку. Щиток должен иметь два штриха, расположение которых определяется из специальных исследований, и жёстко крепиться на рейке.

Передачу высоты выполняют две бригады с двух берегов по двум створам с использованием двух нивелиров и двух комплектов инварных реек. При этих измерениях должен присутствовать начальник партии и главный инженер или начальник экспедиции. Расхождение между превышениями, измеренными разными наблюдателями по разным створам, не должно превышать 5 мм для *III* класса нивелирования.

Измерение превышений через препятствие шириной более 400 м выполняют способом подвижной марки, однако, лучше всего делать такую передачу высоты приборами и по методике *II* класса нивелирования.

Иногда в исключительных случаях нивелирование *III* и *IV* классов через препятствия выполняют по льду, соблюдая следующие правила:

- ход выбирают по наиболее короткому пути и выполняют измерения в кратчайшие сроки (за один день);
- на обоих берегах заблаговременно закладывают по одному постоянному реперу;
- перед началом работы очищают трассу от снега и в местах установки реек пробивают во льду отверстия и вмораживают в них деревянные колья длиной (20 – 30) см с вбитыми в их торцы гвоздями со сферической шляпкой;
- нивелирование по льду выполняют два раза в прямом ходе и два раза в обратном ходе;
- нивелировать нужно в периоды наименьших суточных колебаний уровня льда и использовать результаты наблюдений метеопостов и водопостов;
- во время нивелирования нужно наблюдать за движением льда по отдельной рейке, замороженной в лёд на расстоянии 50 м от берега, и в результаты измерения превышений вводить поправки за движение льда.

Поиск грубых ошибок измерений в нивелирных сетях

Понятие “грубая ошибка измерения” вводится на начальном этапе изучения теории ошибок и теории математической обработки геодезических (и иных) измерений. Под грубой ошибкой понимают случайную ошибку измерения, которая по своему абсолютному значению превышает установленный для случайных ошибок допуск $t \cdot m$, где m - средняя квадратическая ошибка одного измерения, t - коэффициент доверительной вероятности, принимаемый равным либо $t = 3,0$ (с вероятностью 99,7%), либо $t = 2,5$ (с вероятностью 98,8%), либо $t = 2,0$ (с вероятностью 95,4%). Процент вероятности означает, что именно с такой вероятностью измеренное или вычисленное значение X какой-либо величины находится в интервале от $(X - t \cdot m)$ до $(X + t \cdot m)$. Поиск грубых ошибок измерений на практике осложняется тем, что истинные значения случайных ошибок неизвестны, и, если среди случайных ошибок есть грубые ошибки, то об этом можно узнать только по косвенным признакам. К таким признакам можно отнести:

- недопустимо большое значение одной или более невязок условных уравнений связи при коррелятном способе уравнивания;
- недопустимо большое значение свободных членов при рекуррентном способе уравнивания;
- несоизмеримо большие по сравнению с точностью измерений поправки, полученные при уравнивании геодезического построения;
- увеличение средней квадратической ошибки единицы после уравнивания по сравнению с её проектным значением.

В реальном геодезическом построении грубая ошибка может либо маскироваться (ослабляться) на фоне остальных случайных ошибок, либо, наоборот, демаскироваться (усиливаться).

В широком смысле проблема борьбы с грубыми ошибками распадается на несколько отдельных задач:

- установить, есть ли в данном геодезическом построении грубые ошибки вообще (одна или более), или их нет. Если грубые ошибки есть, то следует решать следующие задачи;

- определить конкретные измерения, в которых имеются грубые ошибки – то есть, локализовать положение грубых ошибок с точностью до одного измерения; если это невозможно, то следует попытаться локализовать положение грубых ошибок с точностью до небольшой группы измерений;
- оценить значения грубых ошибок измерений;
- принять меры к ослаблению или полному устранению влияния грубых ошибок измерений на результаты уравнивания данного геодезического построения.

К настоящему времени разработано достаточно много методик по обнаружению и учёту грубых ошибок измерений; некоторые из них базируются на стандартной теории обработки измерений, другие - используют сложные разделы математики с привлечением произвольно назначаемых параметров. Вторую группу составляют так называемые “робастные методы обработки измерений”. В большинстве робастных методик уравнивание выполняется циклами; результаты очередного цикла анализируются, и поправки в измерения сортируются по их величине; затем для части измерений веса пересчитываются, и уравнивание выполняется вновь. Циклы повторяются до тех пор, пока все поправки в измерения будут удовлетворять условию, содержащему тот самый произвольно назначенный параметр.

Все робастные методы являются реализацией принципа обратной связи, схема которого изображена на рис.23. Традиционный путь получения и обработки геодезической информации – это 1 – 2 – 3 – 4 – 1 (через повторные измерения, если в сети обнаружены грубые ошибки измерений). Принцип обратной связи предполагает другой маршрут 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 2. По Инструкции изменять результаты измерений без их повторения запрещено; поэтому остаётся один выход – изменять веса измерений. По существу веса или ошибки измерений назначаются априорно на основе опыта подобных измерений в прошлом. Поэтому корректировка весов измерений является логически обоснованным решением задачи уравнивания геодезических измерений, содержащих грубые ошибки.

Применение робастных методов в геодезии многие ведущие учёные не рекомендуют.

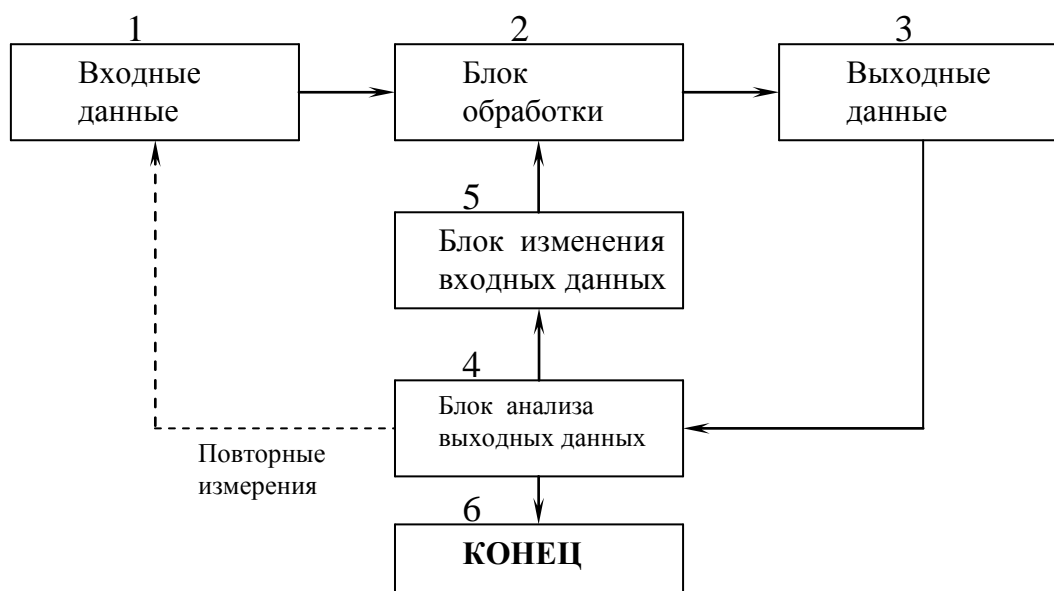


Рисунок 23 - Схема принципа обратной связи обработки информации

Для поиска грубых ошибок в нивелирных сетях наиболее просто и доступно вычислить высотные невязки всех полигонов, выписать их на схему сети и выполнить визуальный анализ невязок. Наличие в двух соседних полигонах больших невязок с противоположными знаками свидетельствует о грубой ошибке измеренного превышения по линии, являющейся общей для обоих полигонов. В отдельных случаях можно

обнаружить грубые ошибки в двух превышениях одного полигона, но сложные комбинации грубых ошибок визуально локализовать практически невозможно.

ОБРАБОТКА ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Принципы обработки измерений

Измерения являются важной составной частью геодезических работ; именно из измерений получают количественную информацию о различных объектах, подлежащих изучению. Геодезистам приходится измерять длины линий, горизонтальные и вертикальные углы, превышения между точками местности, температуру воздуха, ускорение свободного падения, интервалы времени и многое другое. Результаты измерений могут использоваться как непосредственно, так и как промежуточные величины для вычисления таких характеристик объекта, которые либо вообще нельзя измерить, либо их измерение требует слишком больших затрат времени и средств.

Методика выполнения измерений разрабатывается конкретно для каждого вида измерений и имеет целью достичь необходимую точность результатов при наименьшей трудоемкости процесса.

С точки зрения теории обработки измерений все измерения нужно разделить на необходимые и избыточные. Если количество неизвестных величин равно t , а количество измерений равно n , причем $n > t$, то t измерений являются необходимыми, а $(n-t)$ - избыточными.

Простой пример: чтобы узнать значение угла, достаточно измерить его один раз ($t=1$); на практике угол измеряют несколькими приемами, получая n его значений; следовательно, $(n-1)$ измерений избыточны.

Все измерения сопровождаются ошибками, и главная задача обработки измерений - устранение противоречий между результатами измерений, содержащими ошибки, и математической моделью, включающей численные значения измеряемых величин.

Решение этой задачи из-за наличия избыточных измерений неоднозначно, поэтому для получения единственного решения на него накладывают одно или несколько дополнительных условий. В геодезии такое условие записывают в виде:

$$\left[V_i^2 \right] = \min, \quad (1.23)$$

или

$$\left[p \cdot V_i^2 \right] = \min, \quad (1.24)$$

то-есть, из всех возможных решений выбирается такое, в котором сумма квадратов поправок V_i в результаты измерений имеет наименьшее значение; буквой p_i обозначен вес i -того измерения.

В теории обработки измерений для знака "сумма" используются два символа: \sum и $[]$. Обработку измерений при наличии избыточных измерений под условием (1.23) или (1.24) называют уравниванием по методу наименьших квадратов, сокращенно МНК. В зарубежной литературе вместо термина "уравнивание по МНК" часто используют термин "оценивание по МНК".

Уравнивание по МНК можно выполнять двумя способами; первый называется параметрическим, второй - коррелятным. Обозначим через n общее количество измерений, через t - количество определяемых элементов и через r - количество избыточных измерений ($r = n - t$).

В первом способе сначала получают приближенные значения определяемых элементов, сводя задачу к нахождению t параметров-поправок к этим приближенным значениям. Затем составляют n параметрических уравнений (по количеству измерений), преобразуют их и получают t нормальных уравнений с t неизвестными параметрами. Решают нормальные уравнения, затем вычисляют значения определяемых элементов и выполняют оценку точности.

Во втором способе составляют r условных уравнений с n неизвестными поправками к результатам измерений и после их преобразования получают r нормальных уравнений с r

неизвестными вспомогательными множителями, называемыми коррелатами. Решают все t уравнений как систему, находят значения коррелат и по ним вычисляют поправки к измерениям; определяемые элементы вычисляют по значениям исправленных измерений любым из возможных способов.

Трудоемкость того или другого варианта при ручном счете зависит от соотношения t и r ; если $t > r$, то предпочтительнее второй вариант, если $t < r$, то - первый. При счете на ЭВМ как правило используют первый вариант.

В результате уравнивания достигают следующих целей:

вычисляют наиболее надежные, наиболее достоверные значения неизвестных величин, вычисляют и оценивают поправки в измеренные элементы для при ведения их в соответствие с геометрическими условиями конкретной модели, выполняют оценку точности уравненных элементов модели.

Начальные сведения из теории ошибок

Теория ошибок измерений изучает свойства ошибок и законы их распределения, методы обработки измерений с учетом их ошибок, а также способы вычисления числовых характеристик точности измерений. При многократных измерениях одной и той же величины результаты измерений получаются неодинаковыми. Этот очевидный факт говорит о том, что измерения сопровождаются разными по величине и по знаку ошибками. Задача теории ошибок - нахождение наиболее надежного значения измеренной величины, оценка точности результатов измерений и их функций и установление допусков, ограничивающих использование результатов обработки измерений.

По своей природе ошибки бывают грубые, систематические и случайные.

Грубые ошибки являются результатом промахов и просчетов. Их можно избежать при внимательном и аккуратном отношении к работе и организации надежного полевого контроля измерений. В теории ошибок грубые ошибки не изучаются.

Систематические ошибки имеют определенный источник, направление и величину. Если источник систематической ошибки обнаружен и изучен, то можно получить формулу влияния этой ошибки на результат измерения и затем ввести в него поправку; это исключит влияние систематической ошибки. Пока источник какой-либо систематической ошибки не найден, приходится считать ее случайной ошибкой, ухудшающей качество измерений.

Случайные ошибки измерений обусловлены точностью способа измерений (строгостью теории), точностью измерительного прибора, квалификацией исполнителя и влиянием внешних условий. Закономерности случайных ошибок проявляются в массе, то-есть, при большом количестве измерений; такие закономерности называют статистическими.

Освободить результат единичного измерения от случайных ошибок невозможно; невозможно также предсказать случайную ошибку единичного измерения. Теория ошибок занимается в основном изучением случайных ошибок.

Случайная истинная ошибка измерения Δ - это разность между измеренным значением величины l и ее истинным значением X :

$$\Delta = l - X \quad (1.25)$$

Свойства случайных ошибок. Случайные ошибки подчиняются некоторым закономерностям:

при данных условиях измерений абсолютные значения случайных ошибок не превосходят некоторого предела; если какая-либо ошибка выходит за этот предел, она считается грубой,

положительные и отрицательные случайные ошибки равновозможны, среднее арифметическое случайных ошибок стремится к нулю при неограниченном возрастании числа измерений. Третье свойство случайных ошибок записывается так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0 \quad (1.26)$$

малые по абсолютной величине случайные ошибки встречаются чаще, чем большие.

Кроме того, во всей массе случайных ошибок не должно быть явных закономерностей ни по знаку, ни по величине. Если закономерность обнаруживается, значит здесь сказывается влияние какой-то систематической ошибки.

Средняя квадратическая ошибка одного измерения. Для оценки точности измерений можно применять разные критерии; в геодезии таким критерием является средняя квадратическая ошибка. Это понятие было введено Гауссом; он же разработал основные положения теории ошибок. Средняя квадратическая ошибка одного измерения обозначается буквой m и вычисляется по формуле Гаусса:

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} \quad (1.27)$$

где: $[\Delta^2] = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2$;

n - количество измерений одной величины.

Средняя квадратическая ошибка очень чувствительна к большим по абсолютной величине ошибкам, так как каждая ошибка возводится в квадрат. В то же время она является устойчивым критерием для оценки точности даже при небольшом количестве измерений; начиная с некоторого n дальнейшее увеличение числа измерений почти не изменяет значения m ; доказано, что уже при $n = 8$ значение m получается достаточно надежным.

Предельная ошибка ряда измерений обозначается $\Delta_{\text{пред}}$; она обычно принимается равной $3 \cdot m$ при теоретических исследованиях и $2 \cdot m$ или $2.5 \cdot m$ при практических измерениях.

Считается, что из тысячи измерений только три ошибки могут достигать или немного превосходить значение $\Delta_{\text{пред}} = 3 \cdot m$.

Отношение m/X называется средней квадратической относительной ошибкой; для некоторых видов измерений относительная ошибка более наглядна, чем m . Относительная ошибка выражается дробью с числителем, равным 1, например, $m/X = 1/10\,000$.

Средняя квадратическая ошибка функции измеренных величин. Выведем формулу средней квадратической ошибки функции нескольких аргументов произвольного вида:

$$F = f(X, Y, Z, \dots), \quad (1.28)$$

здесь: X, Y, Z, \dots - истинные значения аргументов,

F - истинное значение функции.

В результате измерений получены измеренные значения аргументов l_X, l_Y, l_Z , при этом:

$$\begin{aligned} X &= l_X - \Delta_X \\ Y &= l_Y - \Delta_Y \\ Z &= l_Z - \Delta_Z \end{aligned} \quad (1.29)$$

где $\Delta_X, \Delta_Y, \Delta_Z$ - случайные истинные ошибки измерения аргументов.

Функцию F можно выразить через измеренные значения аргументов и их истинные ошибки:

$$F = f(l_X - \Delta_X, l_Y - \Delta_Y, l_Z - \Delta_Z, \dots).$$

Разложим функцию F в ряд Тейлора, ограничившись первой степенью малых приращений $\Delta_X, \Delta_Y, \Delta_Z$:

$$F = f(l_X, l_Y, l_Z, \dots) - \frac{\partial f}{\partial X} \cdot \Delta_X - \frac{\partial f}{\partial Y} \cdot \Delta_Y - \frac{\partial f}{\partial Z} \cdot \Delta_Z - \dots \quad (1.30)$$

Разность $F - f(l_X, l_Y, l_Z, \dots)$ является случайной истинной ошибкой функции с противоположным знаком, поэтому:

$$\Delta F = \frac{\partial f}{\partial X} \cdot \Delta_X + \frac{\partial f}{\partial Y} \cdot \Delta_Y + \frac{\partial f}{\partial Z} \cdot \Delta_Z + \dots \quad (1.31)$$

Если выполнить n измерений аргументов X, Y, Z , то можно записать n уравнений вида (1.31). Возведем все эти уравнения в квадрат и сложим их; суммарное уравнение разделим на n и получим

$$\begin{aligned} \frac{[\Delta F^2]}{n} &= \left(\frac{\partial f}{\partial X} \right)^2 \cdot \frac{[\Delta_X^2]}{n} + \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \right)^2 \cdot \frac{[\Delta_Y^2]}{n} + \left(\frac{\partial f}{\partial Z} \right)^2 \cdot \frac{[\Delta_Z^2]}{n} + \\ &+ 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial X} \cdot \frac{\partial f}{\partial Y} \cdot \frac{[\Delta_X \cdot \Delta_Y]}{n} + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial X} \cdot \frac{\partial f}{\partial Z} \cdot \frac{[\Delta_X \cdot \Delta_Z]}{n} + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial Y} \cdot \frac{\partial f}{\partial Z} \cdot \frac{[\Delta_Y \cdot \Delta_Z]}{n} \dots \end{aligned}$$

В силу третьего свойства случайных ошибок члены, содержащие произведения случайных ошибок, будут незначительными по величине, и их можно не учитывать; таким образом,

$$m_F^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial X} \right)^2 \cdot m_X^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \right)^2 \cdot m_Y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Z} \right)^2 \cdot m_Z^2 + \dots \quad (1.32)$$

Как частные случаи формулы (1.32) можно написать выражения для средней квадратической ошибки некоторых функций:

$$F = k * X; \quad m_F^2 = k^2 * m_X^2;$$

$$F = a * X \pm b * Y; \quad m_F^2 = a^2 * m_X^2 + b^2 * m_Y^2;$$

$$F = X * tg(Y); \quad m_F^2 = tg^2(Y) * m_X^2 + \frac{X^2}{Cos^4(Y)} * m_Y^2.$$

Если функция имеет вид произведения нескольких аргументов,

$$F = x * y * z,$$

то для нее можно записать выражение относительной ошибки функции:

$$\left(\frac{m_F}{F} \right)^2 = \left(\frac{m_x}{x} \right)^2 + \left(\frac{m_y}{y} \right)^2 + \left(\frac{m_z}{z} \right)^2 \quad (1.33)$$

которое в некоторых случаях оказывается более удобным, чем формула (1.32).

Принцип равных влияний. В геодезии часто приходится определять средние квадратические ошибки аргументов по заданной средней квадратической ошибке функции. Если аргумент всего один, то решение задачи не представляет трудности. Если число аргументов t больше одного, то возникает задача нахождения t неизвестных из одного уравнения, которую можно решить, применяя принцип равных влияний. Согласно этому принципу все слагаемые правой части формулы (1.32) или (1.33) считаются равными между собой.

Арифметическая середина. Пусть имеется n измерений одной величины X , то-есть,

$$\begin{aligned} l_1 - X &= \Delta_1; \\ l_2 - X &= \Delta_2; \\ &\dots\dots\dots; \\ l_n - X &= \Delta_n. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Сложим эти равенства, суммарное уравнение разделим на n и получим:

$$\frac{[l]}{n} - X = \frac{[\Delta]}{n} \quad (1.35)$$

$$\text{Величина} \quad X_0 = \frac{[l]}{n} \quad (1.36)$$

называется средним арифметическим или простой арифметической серединой. Запишем (1.35) в виде

$$X_0 - X = \frac{[\Delta]}{n}$$

по третьему свойству ошибок (1.26) можно написать:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (X_0 - X) = 0,$$

что означает, что при неограниченном возрастании количества измерений простая арифметическая середина стремится к истинному значению измеряемой величины. При ограниченном количестве измерений арифметическая середина является наиболее надежным и достоверным значением измеряемой величины.

Запишем формулу (1.36) в виде

$$X_0 = \frac{1}{n} * l_1 + \frac{1}{n} * l_2 + \dots + \frac{1}{n} * l_n$$

и подсчитаем среднюю квадратическую ошибку арифметической середины, которая обозначается буквой M . Согласно формуле (1.32) напомним:

$$M^2 = \left(\frac{1}{n} \right)^2 * m_{l1}^2 + \left(\frac{1}{n} \right)^2 * m_{l2}^2 + \dots + \left(\frac{1}{n} \right)^2 * m_{ln}^2$$

или

$$M^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 * [m_{i1}^2 + m_{i2}^2 + \dots + m_{in}^2]$$

Но $m_{i1} = m_{i2} = \dots = m_{in} = m$ по условию задачи, так как величина X измеряется при одних и тех же условиях. Тогда в квадратных скобках будет $n * m^2$, одно n сократится и в итоге получим:

$$M^2 = m^2/n$$

или

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \quad (1.37)$$

то-есть, средняя квадратическая ошибка арифметической середины в корень из n раз меньше ошибки одного измерения.

Вычисление средней квадратической ошибки по отклонениям от арифметической середины. Формулу Гаусса (1.27) применяют лишь в теоретических выкладках и при исследованиях приборов и методов измерений, когда известно истинное значение измеряемой величины. На практике оно, как правило, неизвестно, и оценку точности выполняют по отклонениям от арифметической середины.

Пусть имеется ряд равноточных измерений величины X :

l_1, l_2, \dots, l_n .

Вычислим арифметическую середину $X_0 = [l]/n$ и образуем разности:

$$\begin{aligned} l_1 - X_0 &= V_1; \\ l_2 - X_0 &= V_2; \\ &\dots\dots\dots; \\ l_n - X_0 &= V_n. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Сложим все разности и получим $[l] - n * X_0 = [V]$. По определению арифметической середины $n * X_0 = [l]$, поэтому:

$$[V] = 0. \quad (1.39)$$

Величины V называют вероятнейшими ошибками измерений; именно по их значениям и вычисляют на практике среднюю квадратическую ошибку одного измерения, используя для этого формулу Бесселя:

$$m = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-1}} \quad (1.40)$$

Приведем вывод этой формулы. образуем разности случайных истинных ошибок измерений Δ и вероятнейших ошибок V :

$$\begin{aligned} \Delta_1 - V_1 &= X_0 - X; \\ \Delta_2 - V_2 &= X_0 - X; \\ &\dots\dots\dots; \\ \Delta_n - V_n &= X_0 - X. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Разность $(X_0 - X)$ равна истинной ошибке арифметической середины; обозначим ее Δ_0 и перепишем уравнения (1.41):

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_0 + V_1; \\ \Delta_2 &= \Delta_0 + V_2; \\ &\dots\dots\dots; \\ \Delta_n &= \Delta_0 + V_n. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Возведем все уравнения (1.42) в квадрат, сложим их и получим:

$$[\Delta^2] = n * \Delta_0^2 + 2 * \Delta_0 * [V] + [V^2].$$

Второе слагаемое в правой части этого выражения равно нулю по свойству (1.39), следовательно,

$$[\Delta^2] = n * \Delta_0^2 + [V^2].$$

Разделим это уравнение на n и учтя, что $[\Delta^2]/n = m^2$, получим:

$$m^2 = \Delta_0^2 + \frac{[V^2]}{n} \quad (1.43)$$

Заменим истинную ошибку арифметической середины $\Delta 0$ ее средней квадратической ошибкой $M = m / \sqrt{n}$; такая замена практически не изменит правой части формулы (1.43).
Итак,

$$m^2 = \frac{m^2}{n} + \frac{[V^2]}{n},$$

откуда $m^2 \cdot (n - 1) = [V^2]$;

после перенесения $(n-1)$ в правую часть и извлечения квадратного корня получается формула Бесселя (1.40).

Для вычисления средней квадратической ошибки арифметической середины на основании (1.37) получается формула:

$$M = \sqrt{\frac{[V^2]}{n \cdot (n - 1)}} \quad (1.44)$$

Веса измерений. Измерения бывают равноточные и неравноточные. Например, один и тот же угол можно измерить точным или техническим теодолитом, и результаты таких измерений будут неравноточными. Или один и тот же угол можно измерить разным количеством приемов; результаты тоже будут неравноточными. Понятно, что средние квадратические ошибки неравноточных измерений будут неодинаковы. Из опыта известно, что измерение, выполненное с большей точностью (с меньшей ошибкой), заслуживает большего доверия.

Вес измерения - это условное число, характеризующее надежность измерения, степень его доверия; вес обозначается буквой p . Значение веса измерения получают по формуле:

$$p = C/m^2 \quad (1.45)$$

где C - в общем случае произвольное положительное число.

При неравноточных измерениях одной величины наиболее надежное ее значение получают по формуле средневесовой арифметической середины:

$$X_0 = \frac{l_1 \cdot p_1 + l_2 \cdot p_2 + \dots + l_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \quad (1.46)$$

или $X_0 = [l \cdot p] / [p]$.

Ошибку измерения, вес которого равен 1, называют средней квадратической ошибкой единицы веса; она обозначается буквой m . Из формулы (1.45) получаем

$$l = \frac{C}{m^2}$$

откуда $C = m^2$ (1.47)

то-есть, за число C принимают квадрат ошибки единицы веса.

Подсчитаем вес P средневесовой арифметической середины. По определению веса имеем:

$$P = \frac{C}{M^2} \quad (1.48)$$

Согласно (1.46) и (1.32) напомним:

$$M^2 = \frac{1}{[p]^2} \cdot \{p_1^2 \cdot m_{11}^2 + p_2^2 \cdot m_{12}^2 + \dots + p_n^2 \cdot m_{1n}^2\}$$

Подставим сюда вместо m_{i2} их выражения через вес $m^2 = C/p$, тогда:

$$M^2 = \frac{1}{[p]^2} \cdot \{C \cdot p_1 + C \cdot p_2 + \dots + C \cdot p_n\}$$

Подставим это выражение в формулу (1.48) и получим,

$$P = [p], \quad (1.49)$$

то-есть, вес средневесовой арифметической середины равен сумме весов отдельных измерений.

В случае равноточных измерений, когда веса всех измерений одинаковы и равны единице, формула (1.49) принимает вид:

$$P = n. \quad (1.50)$$

При обработке больших групп измерений (при уравнивании геодезических построений по МНК) вычисляются значение ошибки единицы веса, веса измерений и других элементов после уравнивания, а ошибка любого уравненного элемента подсчитывается по формуле:

$$m_i = m \cdot \sqrt{1/p_i} \quad (1.51)$$

где p_i - вес i -того элемента.

Элементы техники вычислений

Точные и приближенные числа. Точные числа получаются при счете отдельных предметов и понятий (пример: 27 шариков, 45 шагов); точными числами являются масштабные коэффициенты (пример: 1 м = 100 см = 1000 мм, масштаб карты равен 1:25000) или целые числа, условно присваиваемые границам физических интервалов (пример: температура таяния льда 0о С, температура кипения воды 100о С).

Приближенные числа в геодезии получают, как правило, из измерений; считается, что записанное приближенное число ошибочно не более, чем на половину единицы последнего разряда:

2.145 - ошибочно на 0.0005 ,

2145 - ошибочно на 0.5 и т.д.

Значащие цифры числа. Все цифры числа кроме нулей слева являются значащими:

4.147 - 4 значащих цифры ,

0.004147 - 4 значащих цифры ,

40.00 - 4 значащих цифры .

Верными значащими цифрами приближенного числа считаются те цифры, значение которых больше ошибки этого числа. Количество верных значащих цифр в результате операций умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня определяется наименьшим количеством верных значащих цифр в исходных числах:

$$2.457 * 0.62 = 1.52334 = 1.5 ,$$

(4) (2) (2)

$$2.457 : 0.62 = 3.96290 = 4.0 ,$$

(4) (2) (2)

$$2.452 = 6.0025 = 6.00 ,$$

(3) (3)

$$\sqrt{2.45} = 1.5652 = 1.57 .$$

(3) (3)

При выполнении этого правила применяется округление приближенных чисел, которое предусматривает, что:

если первая отбрасываемая цифра больше 5 или 5 с последующими цифрами не равными нулю, то последняя оставляемая цифра увеличивается на единицу (2.4617 ~ 2.5 , 2.4523 7~ 2.5),

если первая отбрасываемая цифра меньше 5, то последняя оставляемая цифра не изменяется (2.4417 ~ 2.4),

если первая отбрасываемая цифра есть 5 и за ней либо нет цифр, либо есть одни нули, то последняя оставляемая цифра округляется до четной (пример: 2.55 = 2.6 , 2.65000 = 2.6).

При записи очень большого или очень маленького числа с небольшим количеством верных значащих цифр рекомендуется использовать степень числа 10 (пример: 2.47*10⁶ , 0.45*10⁻⁸).

При сложении и вычитании приближенных чисел количество верных десятичных знаков в ответе определяется наименьшим количеством десятичных знаков в исходных числах:

$$206.8 \quad (1 \text{ дес. знак})$$

$$+ 21.385 \quad (3 \text{ дес. знака})$$

$$0.2751 \quad (4 \text{ дес. знака})$$

$$228.4601 = 228.5 \quad (1 \text{ дес. знак}).$$

Если в задаче более одной арифметической операции, то в результатах промежуточных операций рекомендуется оставлять одну запасную цифру (для уменьшения ошибок округления).

Системы единиц для измерения углов:

Градусная система.

Градус - это 1/90 часть прямого угла,

минута - это 1/60 часть градуса,

секунда - это 1/60 часть минуты,

$$1^{\circ} = 60' = 3600'' .$$

Полная форма записи угла: $124^{\circ}12'14.63''$, $124^{\circ}12'00''$.

1-я сокращенная форма записи угла $124^{\circ}12.244'$.

2-я сокращенная форма записи угла 124.2047° .

Радианная система. Радиан - это центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности. Полный угол в 360° содержит 2π радианов.

Переход от радианной системы к градусной и обратно:

$$b^0 = B_{рад} * \rho^0; \quad B_{рад} = B^0 / \rho^0;$$

$$b' = B_{рад} * \rho'; \quad B_{рад} = B' / \rho';$$

$$b'' = B_{рад} * \rho''; \quad B_{рад} = B'' / \rho''.$$

Значения переходного коэффициента ρ :

$$b^0 = B_{рад} * \rho^0;$$

$$b' = B_{рад} * \rho';$$

$$b'' = B_{рад} * \rho''.$$

Градусная система.

Град - это $1/100$ часть прямого угла,

сантиград - это $1/100$ часть града,

сантисантиград - это $1/100$ часть сантиграда,

$1 \text{ град} = 100 \text{ с} = 10000 \text{ сс}$.

Существуют еще часовая система измерения углов, система делений угломера и некоторые другие.

При нахождении тригонометрических функций угла нужно соблюдать соответствие между значением угла и количеством значащих цифр в значении функции:

угол задан до целых минут - 4 - 5 значащих цифр,

угол задан до десятых долей минуты - 5 - 6 значащих цифр,

угол задан до целых секунд - 6 значащих цифр,

угол задан до десятых долей секунды - 7 значащих цифр.

Приведем некоторые правила оформления геодезических вычислений:

все вычисления следует размещать в таблицах или ведомостях,

написание цифр должно быть аккуратным и четким, исключающим неоднозначное прочтение; желательно использование шрифтов,

записи однородных чисел следует располагать столбиками разряд под разрядом;

количество значащих цифр и десятичных знаков должно соответствовать правилам техники вычислений,

исходные данные рекомендуется выделять цветом или подчеркиванием,

записи в таблицах и ведомостях не должны иметь видимых исправлений; неверно

написанную цифру нужно аккуратно удалить и на этом месте написать верную цифру,

в полевых журналах запрещается исправлять первичные отсчеты, а вычисления можно

исправлять, аккуратно зачеркивая неверные цифры и надписывая сверху верные,

все приращения координат, превышения, невязки и поправки следует писать со знаком ("плюс" или "минус").

Здесь уместно вспомнить слова известного геодезиста В.В. Витковского: "Чи вычисления представляют изящно расположенные столбцы красивых цифр, тот почти всегда правильно и быстро вычисляет. Наоборот, чи вычисления разбросаны в беспорядке, а сами цифры поражают своей уродливостью, тот почти всегда путается и вычисляет с ошибками".

2Й СЕМЕСТР

ПЛАНОВЫЕ СЕТИ СГУЩЕНИЯ

Постановка задачи

Задача сгущения существующей геодезической сети возникает постоянно при реализации на практике принятого в нашей стране принципа построения геодезических сетей “от общего к частному”. Сгустить сеть – это значит, что к существующим пунктам геодезических сетей высокого класса точности требуется добавить ещё один или несколько пунктов более низкого класса точности так, чтобы плотность пунктов оказалась соответствующей требованиям проводимых работ.

Можно предложить несколько вариантов определения координат точек в одном геодезическом построении. Из этого множества вариантов выделились и оформились в виде самостоятельных способов, для которых была разработана соответствующая теория, следующие:

- геодезические засечки;
- линейно-угловой ход;
- система линейно-угловых ходов с узловыми точками;
- триангуляция;
- трилатерация;
- линейно-угловая сеть.

Геодезические засечки применяют тогда, когда нужно определить прямоугольные координаты одной точки; такая задача возникает при привязке свободных или висячих геодезических построений к исходным пунктам, а также при сгущении геодезической сети на малом по территории участке местности, либо когда существует довольно густая сеть исходных пунктов и только в отдельных местах требуется расположить дополнительно по одному – два пункта сгущения.

Остальные способы предназначены для определения координат нескольких пунктов из одного геодезического построения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ ОДНОЙ ТОЧКИ

Способы задания прямоугольной системы координат

Как известно, система прямоугольных координат на плоскости может задаваться тремя способами:

1-й способ - стандартный математический:

- фиксируется местоположение центра системы точки O , проводится ось OX и указывается ее положительное направление;
- перпендикулярно к оси OX проводится ось OY , в соответствии с типом системы (правая или левая) указывается положительное направление оси OY ;
- устанавливается масштаб координат вдоль осей.

При наличии координатных осей для определения координат какой-либо точки S нужно сначала опустить перпендикуляры из этой точки на координатные оси и затем измерить длину этих перпендикуляров; длина перпендикуляра к оси OX равна координате Y , длина перпендикуляра к оси OY - координате X точки (рис.24).

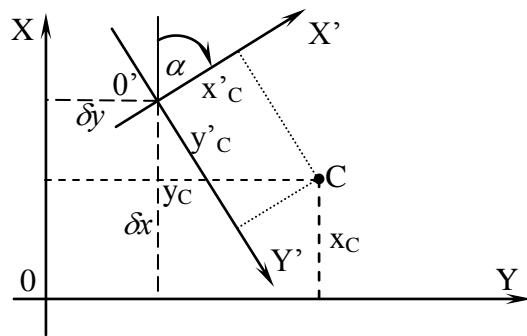


Рисунок 24 – Прямоугольная система координат

Кроме системы XOY можно использовать систему $X'O'Y'$, получающуюся из системы XOY путем параллельного переноса начала координат в точку O' ($X'_0 = \delta x, Y'_0 = \delta y$), и поворота осей координат по часовой стрелке на угол α . Переход из системы XOY в систему $X'O'Y'$ выполняется по формулам

$$X'_C = (X_C - \delta x) \cdot \cos \alpha + (Y_C - \delta y) \cdot \sin \alpha,$$

$$Y'_C = -(X_C - \delta x) \cdot \sin \alpha + (Y_C - \delta y) \cdot \cos \alpha.$$

Для обратного перехода используются формулы

$$X_C = \delta x + X'_C \cdot \cos \alpha - Y'_C \cdot \sin \alpha,$$

$$Y_C = \delta y + X'_C \cdot \sin \alpha + Y'_C \cdot \cos \alpha.$$

В частном случае угол α может быть равен нулю.

2-й способ - координатная сетка:

- проводятся две взаимно перпендикулярные системы параллельных линий; расстояния между линиями одинаковые;
- считается, что эти линии параллельны осям координат, и у каждой линии подписывается значение соответствующей координаты.

Все действия по определению координат точки или по нанесению точки по её известным координатам выполняются внутри соответствующего квадрата, юго-западный угол которого принимается за начало местной системы координат, имеющей силу только внутри данного квадрата.

3-й способ - указываются численные значения координат двух фиксированных точек.

Первый способ является общепринятым; в геодезии этим способом задается зональная система координат Гаусса.

На топографических картах и планах система прямоугольных координат Гаусса задается вторым способом.

На местности система прямоугольных координат задается третьим способом; всегда можно найти несколько геодезических пунктов с известными координатами и определять координаты точки или выносить точку на местность по её известным координатам относительно этих пунктов, выполняя какие-либо измерения.

Три элементарных измерения и их уравнения

На плоскости можно измерять углы и расстояния. Угол фиксируется тремя точками: одна точка - это вершина угла, а две другие точки фиксируют направления 1-й и 2-й сторон угла. В простейшем случае хотя бы одна точка из трех не имеет координат, то есть, является определяемой; в общем случае определяемыми могут быть одна, две или все три точки. Расстояние фиксируется двумя точками, и в общем случае определяемыми могут быть одна точка или обе.

В данном разделе рассматривается простейший случай, когда измерение углов или расстояний выполняют для определения координат одной точки. Поскольку при измерении угла определяемая точка может располагаться либо в вершине угла, либо на конце одной из его сторон, то с точки зрения математики на плоскости имеют место три

разных измерения, которые назовем элементарными. Эти три элементарных измерения лежат в основе большинства способов определения прямоугольных координат точек местности.

1. Измерение горизонтального угла β с вершиной в исходном пункте А между направлением на другой исходный пункт В и направлением на определяемую точку Р (рис. 25).

Уравнение линии АР, называемой линией положения точки Р, имеет вид

$$(Y - Y_A) = (X - X_A) \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

где α – дирекционный угол линии АР, $\alpha = \alpha_{AB} + \beta$; α_{AB} – дирекционный угол линии АВ, вычисляемый из решения обратной геодезической задачи между точками А и В; X, Y – координаты любой точки линии АР, в том числе и точки Р.

Из одного уравнения (1) определить сразу два неизвестных X и Y невозможно, следовательно, одного измерения угла β недостаточно для определения двух координат точки Р.

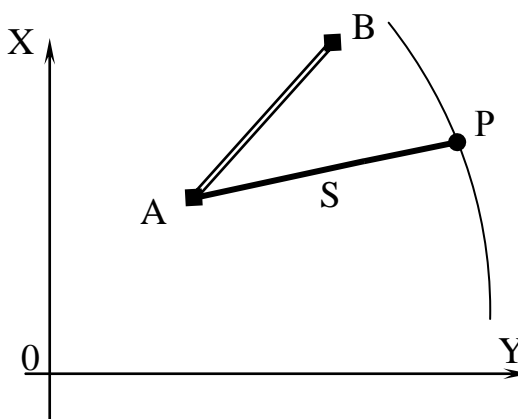
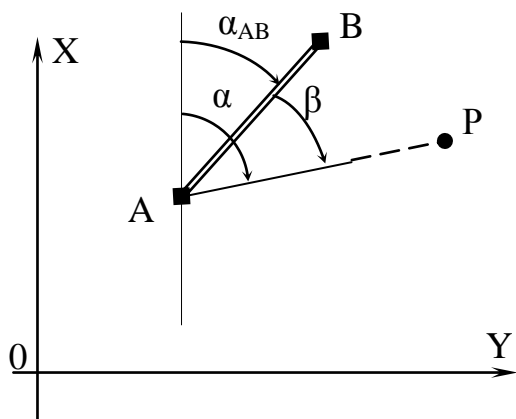


Рисунок 25 – Первое элементарное измерение Рисунок 26 – Второе элементарное измерение

2. Измерение расстояния S между исходным пунктом А и определяемой точкой Р

Окружность с центром в пункте А и радиусом $R = S$ (рис.26) называется линией положения точки Р; уравнение этой окружности имеет вид

$$(X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2 = S^2;$$

здесь X и Y – координаты любой точки окружности, в том числе и точки Р.

Из одного уравнения (2) определить сразу два неизвестных X и Y невозможно, следовательно, одного измерения расстояния S недостаточно для определения двух координат точки Р.

3. Измерение горизонтального угла β с вершиной в определяемой точке Р между направлениями на два исходных пункта (рис.27).

Уравнение окружности, проходящей через три точки А, В и Р, имеет вид

$$(X - X_C)^2 + (Y - Y_C)^2 = R^2. \quad (3.1)$$

В этом уравнении R – радиус окружности, вычисляемый по формуле

$$R = \frac{b}{2 \cdot \sin \beta}.$$

Координаты центра окружности можно вычислить, решив, например, линейную засечку с пунктов А и В на точку С.

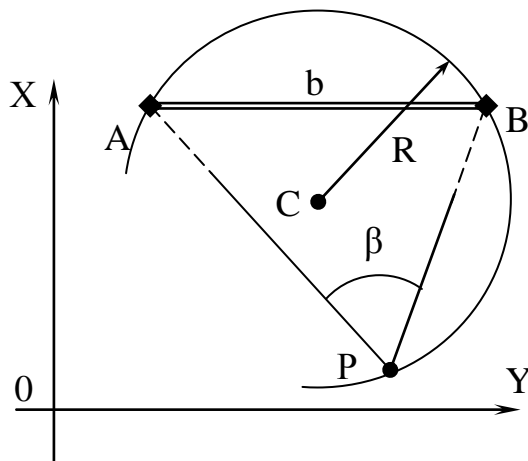


Рисунок 27 – Третье элементарное измерение

Если подставить в уравнение (3.1) значения X_C , Y_C и R , то получится сложное уравнение второй степени относительно неизвестных X и Y . Из одного уравнения два неизвестных найти невозможно, следовательно, измерения одного угла β на определяемой точке недостаточно для определения двух координат этой точки.

Для однозначного определения двух координат точки P нужно выполнить измерение двух элементов. Количество комбинаций из трёх по два равно шести; комбинации двух элементарных измерений для определения координат одной точки называются геодезическими засечками.

1. Измеряются один угол и одно расстояние; оба измерения выполняются на пункте A , – **полярная засечка**;
2. Измеряются два угла; один угол измеряется на пункте A , другой – на пункте B , – **прямая угловая засечка**;
3. Измеряются два расстояния; одно расстояние – от пункта A до пункта P , другое – от пункта B до пункта P , – **линейная засечка**;
4. Измеряются два угла; оба измерения выполняются на точке P ; один угол – между направлениями на исходные пункты A и B , другой – между направлениями на исходные пункты B и D , – **обратная угловая засечка**.

Пятая и шестая комбинации названий не имеют и для определения координат точки P не применяются.

Полярная засечка

В полярной засечке исходными данными являются координаты пункта A и дирекционный угол α_{AB} направления AB (если дирекционный угол α_{AB} не задан, нужно решить обратную геодезическую задачу между пунктами A и B и вычислить его); измеряемыми данными являются горизонтальный угол β (средняя квадратическая ошибка измерения угла m_β) и расстояние S (относительная ошибка измерения расстояния $\frac{m_S}{S} = \frac{1}{T}$); определяемые данные – координаты X, Y точки P .

Графическое решение.

Сначала на чертеже (плане) нужно построить систему координат и нанести точки A и B по их известным координатам; затем нужно соединить точки A и B прямой линией, от линии AB отложить по часовой стрелке угол β и провести линию положения точки P . Зафиксировать на циркуле расстояние S в масштабе чертежа (плана) и провести небольшую дугу радиусом S ; точка пересечения линии и дуги является искомой точкой P (рис.28).

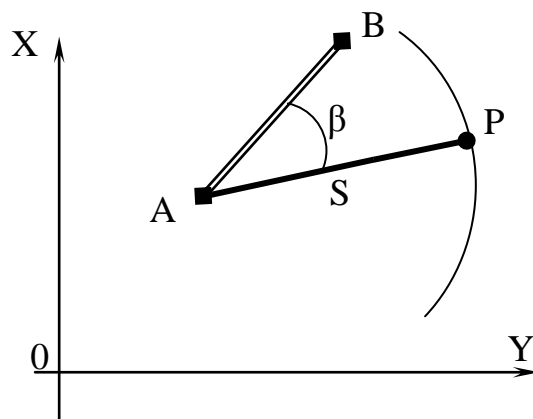


Рисунок 28 – Схема полярной засечки

Аналитическое решение

Вычислим дирекционный угол направления AP $\alpha_{AP} = \alpha_{AB} + \beta$ и запишем два уравнения, соответствующие двум элементарным измерениям: уравнение прямой линии, проходящей через точку A в заданном направлении AP , и уравнение окружности радиусом S с центром в точке A

Алгоритм решения полярной засечки в кратком виде:

- вычислить дирекционный угол линии AP $\alpha_{AP} = \alpha_{AB} + \beta$;
- вычислить приращения координат: $\Delta X = S \cdot \cos \alpha_{AP}$; $\Delta Y = S \cdot \sin \alpha_{AP}$;
- вычислить координаты точки P : $X_P = X_A + \Delta X$; $Y_P = Y_A + \Delta Y$;
- вычислить ошибку положения точки P : $M_P^2 = m_S^2 + S^2 \cdot \frac{m_\beta^2}{\rho^2}$; $\rho = 206265''$.

Пример решения полярной засечки приведён в таблице 4.

Таблица 4 - Решение полярной засечки

№ п/п	Обозначения	Вычисления
3	α_{AB}	$304^0 07' 08''$
4	β	$34 \ 12 \ 30$
6	α_{AP}	$338 \ 19 \ 38$
6'	α_{AP} (десятичная форма)	$338.327 \ 222$
7	$\sin \alpha_{AP}$	$-0.369 \ 305$
8	$\cos \alpha_{AP}$	$+0.929 \ 308$
5	S (м)	$1 \ 000.00$
1	X_A (м)	$6 \ 642 \ 000.00$
9	$\Delta X = S \cdot \cos \alpha_{AP}$	$+ \ 929.31$
11	X_P	$6 \ 642 \ 929.31$
12	Y_P	$7 \ 374 \ 630.70$
10	$\Delta Y = S \cdot \sin \alpha_{AP}$	$- \ 369.30$
2	Y_A (м)	$7 \ 375 \ 000.00$
13	M_P (м)	0.17

Прямая и обратная геодезические задачи

В геодезии есть две стандартные задачи: прямая геодезическая задача на плоскости и обратная геодезическая задача на плоскости.

Прямая геодезическая задача - это вычисление координат X_2 , Y_2 второго пункта, если известны координаты X_1 , Y_1 первого пункта, дирекционный угол α и длина S линии, соединяющей эти пункты.

Прямая геодезическая задача является частью полярной засечки, и формулы для ее решения берутся из набора формул для решения полярной засечки

$$X_2 = X_1 + S \cdot \cos \alpha,$$

$$Y_2 = Y_1 + S \cdot \sin \alpha.$$

Обратная геодезическая задача - это вычисление дирекционного угла α и длины S линии, соединяющей два пункта с известными координатами X_1, Y_1 и X_2, Y_2 (рис.29).

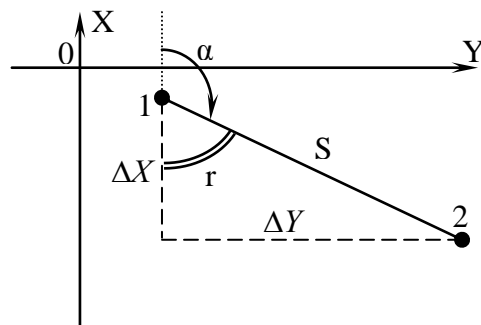


Рисунок 29 – Схема обратной геодезической задачи

Построим на отрезке 1-2 как на гипотенузе прямоугольный треугольник с катетами, параллельными осям координат. В этом треугольнике гипотенуза равна S ; катеты равны приращениям координат точек 1 и 2 ($\Delta X = X_2 - X_1$; $\Delta Y = Y_2 - Y_1$), а один из острых углов равен румбу r линии 1-2.

Если $\Delta X \neq 0$ и $\Delta Y \neq 0$, то треугольник решается по известным формулам

$$S = \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2};$$

$$\operatorname{tgr} = \left| \frac{\Delta Y}{\Delta X} \right| \quad \text{и} \quad r = \operatorname{arctg} \left| \frac{\Delta Y}{\Delta X} \right|.$$

Для данного рисунка направление линии 1-2 находится во второй четверти, поэтому

$$\alpha = 180^\circ - r.$$

Общий порядок нахождения дирекционного угла линии 1-2 включает две операции:

- определение номера четверти по знакам приращений координат $\Delta X, \Delta Y$;
- вычисление дирекционного угла по формулам связи дирекционного угла и румба в соответствии с номером четверти.

Контролем правильности вычислений является выполнение равенства

$$\frac{\Delta X}{\cos \alpha} = \frac{\Delta Y}{\sin \alpha} = S.$$

Если $\Delta X = 0$, то

$$S = |\Delta Y|,$$

$$\alpha = 90^\circ \quad \text{при} \quad \Delta Y > 0;$$

$$\alpha = 270^\circ \quad \text{при} \quad \Delta Y < 0.$$

Если $\Delta Y = 0$, то

$$S = |\Delta X|,$$

$$\alpha = 0^\circ \quad \text{при} \quad \Delta X > 0;$$

$$\alpha = 180^\circ \quad \text{при} \quad \Delta X < 0.$$

Для решения обратной задачи в автоматическом режиме (в программах для ЭВМ) используется другой алгоритм, не содержащий тангенса угла и исключаяющий возможное деление на ноль при $\Delta X = 0$:

$$S = \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2},$$

$$\alpha = \operatorname{arcCos} \left(\frac{\Delta X}{S} \right),$$

если $\Delta Y \geq 0$, то $\alpha = a$;
 если $\Delta Y < 0$, то $\alpha = 360^\circ - a$.

Таблица 5 – Решение обратной геодезической задачи (1-й алгоритм)

№ п/п	Обозначения	Вычисления
3	X_B (м)	6 642 841.24
1	X_A	6 642 000.00
5	$X_B - X_A$	+ 841.24
13	$b = (5) / (11)$	1 499.78
11	$\cos \alpha$	+ 0. 560 910
7	$\operatorname{tg} r$	1. 475 952
8	r (десятичная форма)	55. 881 229
8'	r (IV четверть)	$55^\circ 52' 52''$
9	$\alpha = 360^\circ - r$	$304^\circ 07' 08''$
10	$\sin \alpha$	- 0. 827 877
12	$b = (6) / (10)$	1 499.78
4	Y_B (м)	7 373 758.37
2	Y_A	7 375 000.00
6	$Y_B - Y_A$	- 1 241.63
14	$(X_B - X_A)^2$	707 684.7
15	$(Y_B - Y_A)^2$	1 541 645.0
16	$b^2 = (14) + (15)$	2 249 329.7
17	$b = \sqrt{(16)}$	1 499.78

Таблица 6 – Решение обратной геодезической задачи (2-й алгоритм)

№ п/п	Обозначения	Вычисления
3	X_B (м)	6 642 841.24
1	X_A	6 642 000.00
5	$X_B - X_A$	+ 841.24
11	$\cos a' = (5) / (10)$	+ 0. 560 909
12	a' (десятичная форма)	55. 881 316
12'	a'	$55^\circ 52' 53''$
13	$\alpha = 360^\circ - a'$	$304^\circ 07' 07''$
4	Y_B (м)	7 373 758.37
2	Y_A	7 375 000.00
6	$Y_B - Y_A$	- 1 241.63
7	$(X_B - X_A)^2$	707 684.7
8	$(Y_B - Y_A)^2$	1 541 645.0
9	$b^2 = (14) + (15)$	2 249 329.7
10	$b = \sqrt{(16)}$	1 499.78

Прямая угловая засечка

Сначала рассмотрим так называемый общий случай прямой угловой засечки, когда углы β_1 и β_2 измеряются на двух пунктах с известными координатами, каждый от своего направления с известным дирекционным углом (рис.30).

Исходные данные: $X_A, Y_A, \alpha_{AC}, X_B, Y_B, \alpha_{BD}$;

Измеряемые элементы: β_1, β_2 ;

Неизвестные элементы: X, Y точки P .

Если α_{AC} или α_{BD} не заданы явно, нужно решить обратную геодезическую задачу сначала между пунктами A и C и затем между пунктами B и D .

Графическое решение. От направления AC отложить с помощью транспортира угол β_1 и провести прямую линию AP ; от направления BD отложить угол β_2 и провести прямую линию BP ; точка пересечения этих прямых является искомой точкой P .

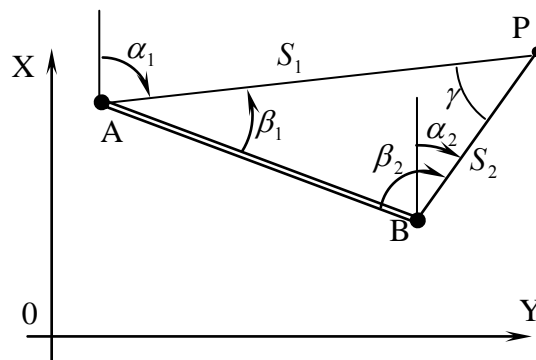
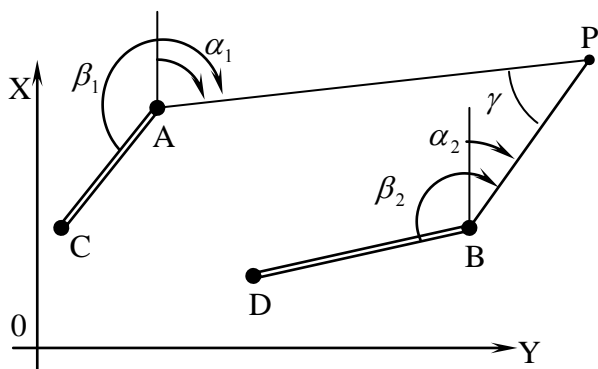


Рисунок 30 – Общий случай прямой угловой засечки Рисунок 31 – Частный случай ПУЗ

Аналитическое решение. Приведем алгоритм, соответствующий общему случаю засечки:

- 1) вычислить дирекционные углы линий AP (α_1) и BP (α_2)

$$\alpha_1 = \alpha_{AC} + \beta_1; \quad \alpha_2 = \alpha_{BD} + \beta_2;$$

- 2) написать два уравнения прямых линий

$$\text{для линии } AP \quad Y - Y_A = \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot (X - X_A),$$

$$\text{для линии } BP \quad Y - Y_B = \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot (X - X_B);$$

- 3) решить систему двух уравнений и вычислить неизвестные координаты X, Y

$$X = X_A + \frac{(Y_B - Y_A) - (X_B - X_A) \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2},$$

$$Y = Y_A + (X - X_A) \cdot \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Частным случаем прямой угловой засечки считают тот случай, когда углы β_1 и β_2 измерены от направлений AB и BA , причем угол β_1 - правый, а угол β_2 - левый (в общем случае засечки оба угла - левые) - рис.31.

Решение прямой угловой засечки методом треугольника соответствует частному случаю засечки. Порядок решения прямой угловой засечки методом треугольника:

- 1) решить обратную задачу между пунктами A и B и получить дирекционный угол α_{AB} и длину b линии AB ,

- 2) вычислить угол γ при вершине P $\gamma = 180^\circ - (\beta_1 + \beta_2);$

- 3) используя теорему синусов для треугольника APB

$$\frac{b}{\sin \gamma} = \frac{S_1}{\sin \beta_2} = \frac{S_2}{\sin \beta_1},$$

вычислить длины сторон AP (S_1) и BP (S_2);

- 4) вычислить дирекционные углы α_1 и α_2

$$\alpha_1 = \alpha_{AB} - \beta_1 [+360^\circ], \quad \alpha_2 = \alpha_{BA} + \beta_2 [-360^\circ];$$

- 5) решить прямую задачу от пункта A к точке P и для контроля - от пункта B к точке P ; оба решения должны совпасть.

Для вычисления координат X, Y в частном случае прямой угловой засечки можно использовать формулы Юнга

$$X = \frac{X_A \cdot \operatorname{Ctg} \beta_2 + X_B \cdot \operatorname{Ctg} \beta_1 - Y_A + Y_B}{\operatorname{Ctg} \beta_1 + \operatorname{Ctg} \beta_2},$$

$$Y = \frac{Y_A \cdot \text{Ctg} \beta_2 + Y_B \cdot \text{Ctg} \beta_1 + X_A - X_B}{\text{Ctg} \beta_1 + \text{Ctg} \beta_2}.$$

От общего случая прямой угловой засечки нетрудно перейти к частному случаю; для этого нужно сначала решить обратную геодезическую задачу между пунктами A и B и получить дирекционный угол α_{AB} линии AB и затем вычислить углы в треугольнике APB при вершинах A и B

$$\angle BAP = \alpha_{AB} - (\alpha_{AC} + \beta_1) \quad \text{и} \quad \angle ABP = (\alpha_{BD} + \beta_2) - \alpha_{BA}.$$

Для машинного счета все рассмотренные способы решения прямой угловой засечки по разным причинам неудобны. Один из возможных алгоритмов решения общего случая засечки на ЭВМ предусматривает следующие действия:

- 1) вычисление дирекционных углов α_1 и α_2 ,
- 2) введение местной системы координат $X'O'Y'$ с началом в пункте A и с осью $O'X'$, направленной вдоль линии AP , пересчет координат пунктов A и B и дирекционных углов α_1 и α_2 из системы XOY в систему $X'O'Y'$ (рис.32)

$$\begin{aligned} X'_A &= 0; & Y'_A &= 0; & \alpha'_1 &= 0; & \alpha'_2 &= \alpha_2 - \alpha_1; & \text{Р} \\ X'_B &= (X_B - X_A) \cdot \cos \alpha_1 + (Y_B - Y_A) \cdot \sin \alpha_1; \\ Y'_B &= -(X_B - X_A) \cdot \sin \alpha_1 + (Y_B - Y_A) \cdot \cos \alpha_1. \end{aligned}$$

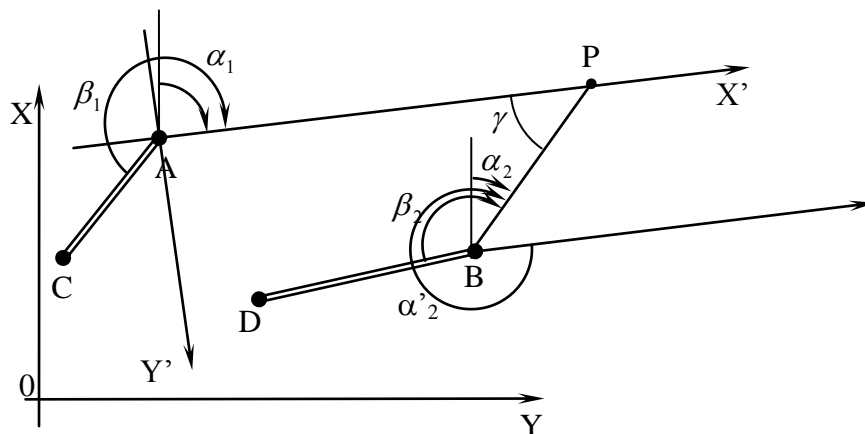


Рисунок 32 – Прямая угловая засечка в системе координат $X'O'Y'$

- 3) запись уравнений линий AP и BP в системе $X'O'Y'$

$$\begin{aligned} Y' &= 0, \\ Y' - Y'_B &= \text{tg} \alpha'_2 \cdot (X' - X'_B); \end{aligned}$$

и совместное решение этих уравнений

$$\begin{aligned} X' &= X'_B - Y'_B \cdot \text{Ctg} \alpha'_2, \\ Y' &= 0; \end{aligned} \tag{3.2}$$

- 4) перевод координат X' и Y' из системы $X'O'Y'$ в систему XOY

$$\begin{aligned} X &= X_A + X' \cdot \cos \alpha_1, \\ Y &= Y_A + X' \cdot \sin \alpha_1. \end{aligned}$$

Так как $\text{Ctg} \alpha'_2 = -\text{Ctg} \gamma$ и угол засечки γ всегда больше 0° , то решение (3.2) всегда существует.

Линейная засечка

В линейной засечке исходными данными являются координаты пунктов A и B ; измеряемыми данными являются расстояния S_1 и S_2 (относительная ошибка измерения расстояний $\frac{m_s}{S} = \frac{1}{T}$); определяемые данные – координаты X, Y точки P .

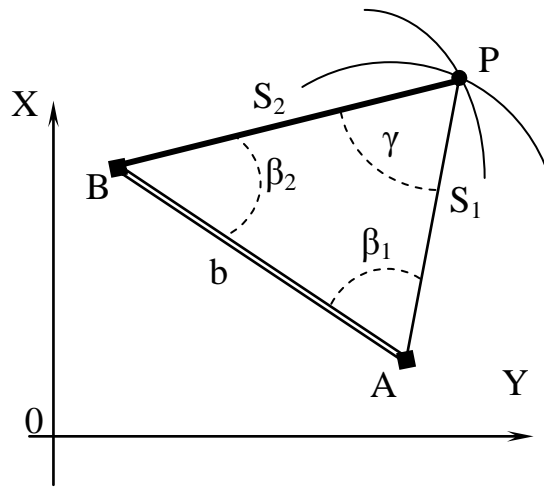


Рисунок 33 – Линейная засечка

Графическое решение.

Сначала на чертеже (плане) нужно построить систему координат и нанести точки A и B по их известным координатам; затем нужно провести две окружности с центрами в точках A и B , первую окружность – радиусом S_1 и вторую – радиусом S_2 ; одна из точек пересечения этих окружностей и является искомой точкой P ; другая точка P' является вторым (альтернативным) вариантом решением засечки (рис.33)

Аналитическое решение линейной засечки может быть выполнено по двум алгоритмам: первый из них предусматривает решение системы уравнений двух измеренных расстояний

$$\begin{aligned}(X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2 &= S_1^2, \\ (X - X_B)^2 + (Y - Y_B)^2 &= S_2^2.\end{aligned}$$

У этой системы уравнений нет простого решения в системе координат XOY , поэтому приходится применять систему координат $X'O'Y'$ с началом в точке A и осью $O'X'$, направленной от точки A вдоль линии AB . В новой системе координаты точек A и B будут равны

$$\begin{aligned}X'_A &= 0; & Y'_A &= 0; \\ X'_B &= b; & Y'_B &= 0;\end{aligned}$$

Расстояние b , равное длине линии AB , находится из решения обратной геодезической задачи между точками A и B ; при этом вычисляется также дирекционный угол α линии AB .

Уравнения двух окружностей в новой системе координат $X'O'Y'$ будут иметь вид

$$\begin{aligned}X'^2 + Y'^2 &= S_1^2; \\ (X' - b)^2 + Y'^2 &= S_2^2.\end{aligned}$$

Совместное решение этих двух уравнений предусматривает раскрытие скобок во втором уравнении и вычитание второго уравнения из первого

$$2 \cdot X' \cdot b - b^2 = S_1^2 - S_2^2,$$

откуда

$$X' = \frac{S_1^2 - S_2^2 + b^2}{2 \cdot b},$$

и

$$Y' = \pm \sqrt{S_1^2 - X'^2}.$$

Если искомая точка находится слева от линии AB , то в формуле для Y' нужно брать знак “минус”, если справа, то – знак “плюс”.

Пересчёт координат точки P из системы $X'O'Y'$ в систему XOY выполняется по формулам

$$X = X_A + X' \cdot \cos \alpha - Y' \cdot \sin \alpha,$$

$$Y = Y_A + X' \cdot \sin \alpha + Y' \cdot \cos \alpha.$$

Описанный алгоритм удобен для составления программы при решении линейной засечке на ЭВМ.

Алгоритм “ручного счёта” предусматривает решение треугольника ABP по формулам планиметрии:

- в треугольнике ABP по теореме косинусов вычислить углы β_1 и β_2

$$S_2^2 = b^2 + S_1^2 - 2 \cdot b \cdot S_1 \cdot \cos \beta_1,$$

$$S_1^2 = b^2 + S_2^2 - 2 \cdot b \cdot S_2 \cdot \cos \beta_2;$$

- вычислить угол γ этого же треугольника $\gamma = 180^\circ - (\beta_1 + \beta_2)$;

- вычислить дирекционные углы сторон AP и BP :

точка P справа от линии AB

$$\alpha_{A2} = \alpha_{AB} + \beta_1,$$

$$\alpha_{BP} = \alpha_{BA} - \beta_2;$$

точка P слева от линии AB

$$\alpha_{AP} = \alpha_{AB} - \beta_1,$$

$$\alpha_{BP} = \alpha_{BA} + \beta_2;$$

дирекционный угол α_{AB} следует взять равным углу α из решения обратной геодезической задачи между точками A и B ; $\alpha_{BA} = \alpha_{AB} \pm 180^\circ$;

- решить прямые геодезические задачи:

из пункта A на точку P

$$X = X_A + S_1 \cdot \cos \alpha_{A2},$$

$$Y = Y_A + S_1 \cdot \sin \alpha_{A2},$$

и из пункта B на точку P

$$X = X_B + S_2 \cdot \cos \alpha_{B2},$$

$$Y = Y_B + S_2 \cdot \sin \alpha_{B2};$$

расхождение координат X и Y по двум решениям не должно превышать 0,02 м;

- вычислить ошибку положения точки P по формуле

$$M_P = \frac{\sqrt{m_{S_1}^2 + m_{S_2}^2}}{\sin \gamma}.$$

Пример решения линейной засечки приведён в таблице 7.

Напоминание: При выполнении операций 19 и 20 искомый угол (β_1 или β_2) следует перевести из десятичной формы в полную форму, округлить до целых секунд и затем уже записать в таблицу вычислений. Перед выполнением операций 23 и 24 нужно перевести в десятичную форму угол α_{AP} ; перед выполнением операций 25 и 26 нужно перевести в десятичную форму угол α_{BP} .

Таблица 7 - Решение линейной засечки

№ п/п	Обозначения (точка P справа от линии AB)	Вычисления
5	b (м)	1 499,78
8	S_1	1 000,00
9	S_2 (справа)	1 200,00
10	b^2	2 249 340
11	S_1^2	1 000 000
12	S_2^2	1 440 000
13	$b^2 + S_1^2 - S_2^2$	1 809 340
14	$2 \cdot b \cdot S_1$	2 999 560
15	$\cos \beta_1 = (13) / (14)$	+ 0,603 202

6	α_{AB}	$304^0 07' 08''$
19	$\beta_1 = \arccos (15)$	52 54 02
21	$\alpha_{AP} = (6) + (19)$	357 01 10
1	X_A (м)	6 643 000, 00
23	$S_1 \cdot \cos \alpha_{A2}$	+ 998, 65
27	$X_2 = (1) + (23)$	6 642 998, 65
28	$Y_2 = (2) + (24)$	7 374 948, 00
24	$S_1 \cdot \sin \alpha_{A2}$	– 52, 00
2	Y_A	7 375 000, 00
16	$b^2 + S_2^2 - S_1^2$	2 689 340
17	$2 \cdot b \cdot S_2$	3 599 472
18	$\cos \beta_2 = (16) / (17)$	+ 0, 747 148
7	$\alpha_{BA} = \alpha_{AB} \pm 180^0$	$124^0 07' 08''$
20	$\beta_2 = \arccos (18)$	41 39 22
22	$\alpha_{BP} = (7) - (20)$	82 27 46
3	X_B (м)	6 642 841, 24
25	$S_2 \cdot \cos \alpha_{B2}$	+ 157, 40
29	$X = (3) + (25)$	6 642 998, 64
30	$Y = (4) + (26)$	7 374 948, 00
26	$S_2 \cdot \sin \alpha_{B2}$	+ 1 189, 63
4	Y_B	7 373 758, 37
31	γ	$85^0 26' 36''$
32	M_P (м)	0, 16

Обратная угловая засечка

К элементарным измерениям относится и измерение угла β на определяемой точке P между направлениями на два пункта A и B с известными координатами X_A, Y_A и X_B, Y_B . Однако, это измерение оказывается теоретически довольно сложным, поэтому рассмотрим его отдельно. Проведем окружность через три точки A, B, P . Из школьного курса геометрии известно, что угол с вершиной на окружности измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Центральный угол, опирающийся на ту же дугу, измеряется всей дугой, следовательно, он будет равен 2β (рис.34).

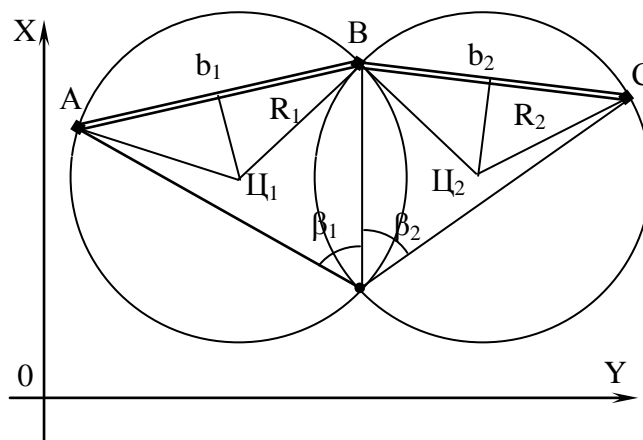
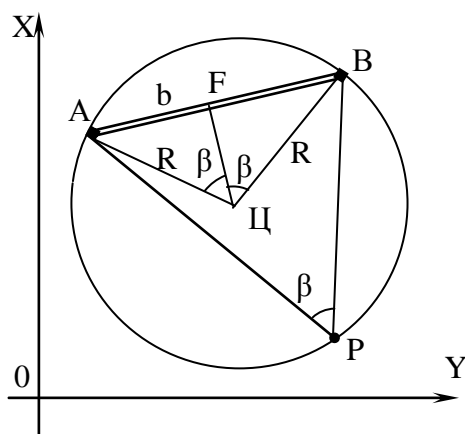


Рисунок 34 - К вычислению R и координат Ц Рисунок 35 – Обратная угловая засечка

Расстояние b между пунктами A и B считается известным, и из прямоугольного треугольника $F\text{Ц}B$ можно найти радиус R окружности

$$R = \frac{b}{2 \cdot \sin \beta}. \quad (3.3)$$

Уравнение окружности имеет вид

$$(X - X_C)^2 + (Y - Y_C)^2 = R^2, \quad (3.4)$$

где X_C, Y_C - координаты центра окружности. Их можно вычислить, решив либо прямую угловую, либо линейную засечку с пунктов A и B на точку C . В уравнении (3.4) X, Y - координаты любой точки окружности, в том числе и точки P , но для нахождения двух координат точки P одного такого уравнения недостаточно. Обратной угловой засечкой называют способ определения координат точки P по двум углам β_1 и β_2 , измеренным на определяемой точке P между направлениями на три пункта с известными координатами A, B, C (рис.35).

Исходные данные: $X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C$;

Измеряемые элементы: β_1, β_2 ;

Неизвестные элементы: координаты точки P - X, Y .

Графическое решение. Приведем способ Болотова графического решения обратной угловой засечки. На листе прозрачной бумаги (кальки) нужно построить углы β_1 и β_2 с общей вершиной P ; затем наложить кальку на чертеж и, перемещая ее, добиться, чтобы направления углов на кальке проходили через пункты A, B, C на чертеже; переколоть точку P с кальки на чертеж.

Аналитическое решение. Аналитическое решение обратной угловой засечки предусматривает ее разложение на более простые задачи, например, на две прямые угловые засечки и одну линейную, или на три линейных засечки и т.д. Известно более десяти способов аналитического решения, но мы рассмотрим только один - через последовательное решение трех линейных засечек. Предположим, что положение точки P известно, и проведем две окружности: одну радиусом R_1 через точки A, B, P и другую - радиусом R_2 через точки B, C, P (рис.35). Радиусы этих окружностей получим по формуле (3.3)

$$R_1 = \frac{b_1}{2 \sin \beta_1}; \quad R_2 = \frac{b_2}{2 \sin \beta_2}.$$

Если координаты центров окружностей (точек C_1 и C_2) будут известны, то координаты точки P можно определить по формулам линейной засечки: из точки C_1 по расстоянию R_1 и из точки C_2 - по расстоянию R_2 . Координаты центра C_1 можно найти по формулам линейной засечки из точек A и B по расстояниям R_1 , причем из двух решений нужно взять то, которое соответствует величине угла β_1 ; если $\beta_1 < 90^\circ$, то точка C_1 находится справа от линии AB ; если $\beta_1 > 90^\circ$, то точка C_1 находится слева от линии AB . Координаты центра C_2 находятся по формулам линейной засечки из точек B и C по расстояниям R_2 , и одно решение из двух возможных выбирается по тому же правилу: если $\beta_2 < 90^\circ$, то точка C_2 находится справа от линии BC , если $\beta_2 > 90^\circ$, то точка C_2 находится слева от линии BC .

Задача не имеет решения, если все четыре точки A, B, C и P находятся на одной окружности, так как обе окружности сливаются в одну, и точку их пересечения указать невозможно.

Комбинированные засечки

В рассмотренных способах решения засечек количество измерений принималось теоретически минимальным (два измерения), обеспечивающим получение результата, однако, при этом нет контроля правильности измерений. На практике для нахождения координат X и Y одной точки, как правило, выполняют не два, а три и более измерений; понятно, что в этом случае появляется возможность контроля измерений, и, кроме того, повышается точность решения задачи. Каждое измерение, вводимое в задачу сверх

теоретически минимального количества, называют избыточным; оно порождает одно дополнительное решение. Геодезические засечки без избыточных измерений принято называть однократными, а засечки с избыточными измерениями - многократными.

При наличии избыточных измерений вычисление неизвестных выполняют по способу уравнивания. В настоящее время алгоритмы строгого уравнивания измерений в различных геодезических построениях реализованы в машинных программах на ЭВМ; для ручного счета обычно применяют нестрогие (упрощенные) способы уравнивания. Упрощенный способ уравнивания какой-либо многократной засечки (n измерений) предусматривает сначала формирование и решение всех возможных вариантов независимых однократных засечек (их число равно $n-1$), а затем - вычисление средних значений координат точки из всех полученных результатов, если они различаются между собой на допустимую величину.

Ошибка положения точки в однократных засечках

Положение точки на плоскости по двум измерениям получается в пересечении двух линий положения. Для измеренного расстояния S линией положения является окружность радиуса S с центром в исходном пункте A (рис.36-а); для измеренного угла β с вершиной в исходном пункте A - прямая линия, проведенная под углом β к исходной линии AB (рис.36-б).

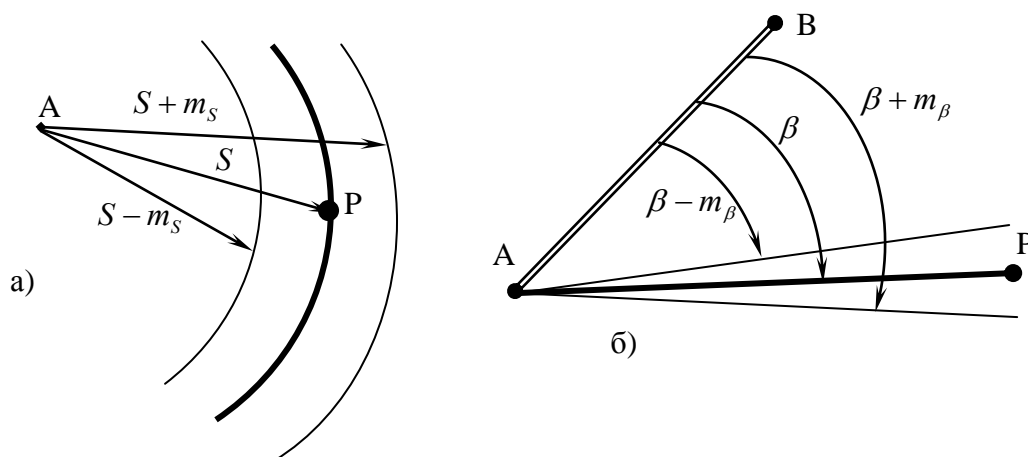


Рисунок 36 - Линия положения и "полоса положения" точки P :
а) для измеренного расстояния, б) для измеренного угла.

Вследствие ошибок измерений необходимо ввести понятие "полоса положения". Для расстояния S , измеренного со средней квадратической ошибкой m_S - это круговой пояс (кольцо) шириной $2m_S$ между двумя окружностями радиусами $(S - m_S)$ и $(S + m_S)$; для угла β , измеренного с ошибкой m_β - это узкий треугольник с вершиной в точке A и углом при вершине $2m_\beta$. Линия положения точки является осью симметрии полосы положения (рис.37).

Введем понятие "вектор ошибки измерения" и обозначим его через V . Для измеренного расстояния вектор V_S направлен вдоль линии AP (прямо или обратно) и имеет модуль $v_S = m_S$; для измеренного угла вектор V_β направлен перпендикулярно линии AP (влево или вправо от нее) и имеет модуль $v_\beta = S \cdot \frac{m_\beta}{\rho}$, где $S = AP$.

Точка P , находясь на пересечении двух линий положения, является центром четырёхугольника положения, образующегося в пересечении двух полос положения (рис.37). Этот элементарный четырёхугольник можно считать параллелограммом, так как в пределах него дуги окружностей можно заменить отрезками касательных, а расходящиеся стороны угла - отрезками прямых, параллельных линии положения. Расстояния от точки P до границ четырёхугольника неодинаковы, что говорит о различии ошибок положения точки P по разным направлениям.

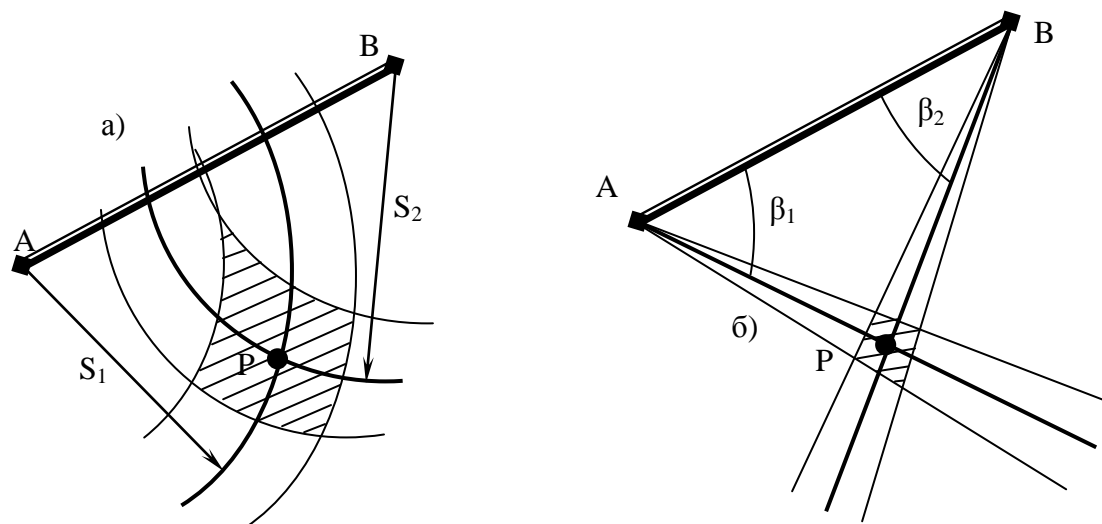


Рисунок 37 - Четырёхугольник положения:

а) в линейной засечке, б) в прямой угловой засечке.

Линии положения делят четырёхугольник положения на 4 равные части (рис.38), которые назовем параллелограммами ошибок с углами при вершинах γ и $(180^\circ - \gamma)$, где γ - $(180^\circ - \gamma)$ - угол между векторами ошибок V_1 и V_2 .

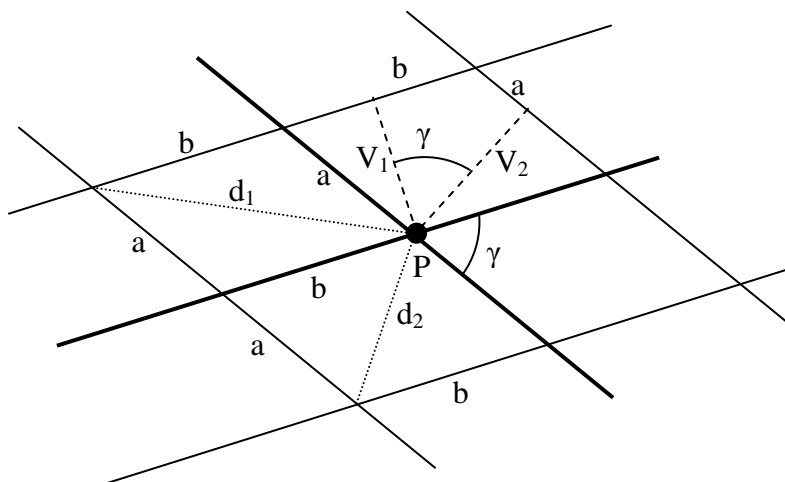


Рисунок 38 – Параллелограммы ошибок

Поскольку высоты параллелограммов ошибок численно равны модулям векторов v_1 и v_2 , то стороны параллелограммов получаются по известным формулам (рис.38)

$$a = \frac{v_1}{\sin \gamma}; \quad b = \frac{v_2}{\sin \lambda}. \quad (3.5)$$

Наибольшее отклонение от точки P имеют две противоположные вершины параллелограмма положения; две другие вершины имеют наименьшее отклонение. В любом геодезическом построении существует так называемое "наиболее слабое место"; в этом месте ошибка какого-либо элемента имеет наибольшее значение. Как правило, для обобщенной характеристики точности данного построения берется значение ошибки именно в этом наиболее слабом месте. В соответствии с этим принципом за ошибку положения точки P можно принять длину большой диагонали параллелограмма ошибок

$$d_1^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot |\cos \gamma|$$

или с учетом (3.5)

$$M_P^2 = d_1^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + av_1v_2 \cdot |\cos \gamma|}{\sin^2 \gamma}.$$

Ошибка положения точки M_P - это скалярная величина, показывающая среднее квадратическое отклонение по разным направлениям вычисленного положения точки P от ее истинного положения

$$M_P^2 = a^2 + b^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2}{\sin^2 \gamma};$$

Из этой формулы легко получаются известные формулы для оценки точности любой однократной засечки:

- полярная засечка: $v_1 = m_s; \quad v_2 = S \cdot \frac{m_\beta}{\rho}; \quad \gamma = 90^\circ;$

$$M_P^2 = m_s^2 + S^2 \cdot \frac{m_\beta^2}{\rho^2};$$

- прямая угловая засечка: $v_1 = S_1 \cdot \frac{m_\beta}{\rho}; \quad v_2 = S_2 \cdot \frac{m_\beta}{\rho};$

$$M_P^2 = \frac{m_\beta^2}{\rho^2} \cdot \frac{S_1^2 + S_2^2}{\sin^2 \gamma};$$

- линейная засечка: $v_1 = m_{s_1}; \quad v_2 = m_{s_2};$

$$M_P^2 = \frac{m_{s_1}^2 + m_{s_2}^2}{\sin^2 \gamma}.$$

- обратная угловая засечка:

В этой засечке правая часть формулы ошибки положения точки P должна содержать три слагаемых:

- за ошибку линейной засечки точки C_1 с исходных пунктов A и B ,
- за ошибку линейной засечки точки C_2 с исходных пунктов B и C ,
- за ошибку линейной засечки точки P с точек C_1 и C_2 .

Для многих случаев практики достаточно считать, что истинное положение точки P находится внутри круга радиуса M_P с центром в точке P . В строгой теории рассмотренный критерий называется радиальной ошибкой. Кроме того, в этой теории применяются и более сложные критерии, такие как "эллипс ошибок" (кривая 2-го порядка), "подера эллипса ошибок" (кривая 4-го порядка) и др.

При количестве измерений $n > 2$ (многократные засечки) точка P получается в пересечении n линий положения, соответствующих урвненным значениям измерений; полосы положения, пересекаясь, образуют n -угольник. Ошибка положения точки P будет определяться расстоянием от точки P до самой удаленной от нее вершины этого многоугольника.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ ПУНКТОВ ЛИНЕЙНО-УГЛОВЫХ ХОДОВ

Классификация линейно-угловых ходов

Определение линейно-углового хода можно дать как с позиций геометрии (линейно-угловой ход – это ломаная линия, в которой измеряют длины сторон и углы между ними), так и с позиций метода определения координат пунктов хода (линейно-угловой ход – это последовательность полярных засечек); оба определения являются верными и дополняют одно другое. Классификацию линейно-угловых ходов можно провести по двум параметрам – по геометрическим характеристикам хода и по точности выполняемых в ходе измерений.

В зависимости от формы хода различают:

- стандартный разомкнутый линейно-угловой ход (рис.39-а);
- разомкнутый ход с частичной или полной координатной привязкой;
- стандартный замкнутый линейно-угловой ход (рис.39-б);
- висячий линейно-угловой ход;
- свободный линейно-угловой ход.

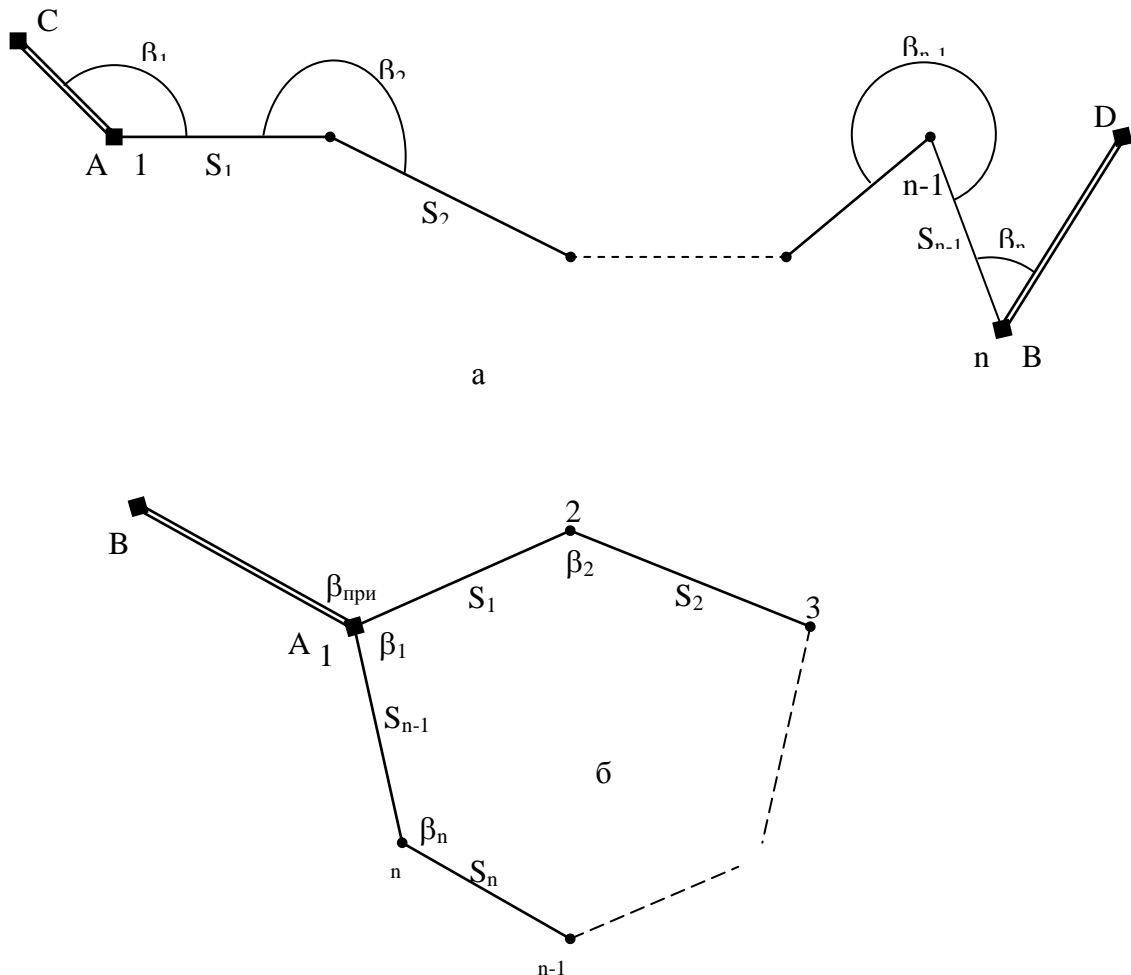


Рисунок 39 – Некоторые стандартные формы линейно-угловых ходов

В зависимости от точности измерений углов и расстояний линейно-угловые ходы делятся на две группы – теодолитные ходы и полигонометрические ходы.

Теодолитные ходы бывают 1-го, 2-го и 3-го разрядов (таблица 8).
Таблица 8

Разряд хода	Ср.кв.оши. измерения углов	Относит.ош. измер. сторон
1	до 30''	1/1000

2	до 30''	1/2000
3	до 30''	1/3000

Полигонометрические ходы в сетях сгущения бывают 4-го класса, 1-го и 2-го разрядов (таблица 9).

Таблица 9 - Основные характеристики полигонометрических сетей сгущения (согласно Письма ГУГК СССР N: 1-1052 от 11 ноября 1987 года)

Показатели	4-й класс	1-й разряд	2-й разряд
Предельная длина в км отдельного хода при измерении линий светодальномерами в зависимости от числа сторон	8 при $n = 30$ 10 при $n = 20$ 12 при $n = 15$ 15 при $n = 10$ 20 при $n = 5$	10 при $n = 50$ 12 при $n = 40$ 15 при $n = 25$ 20 при $n = 15$ 25 при $n = 10$	6 при $n = 30$ 8 при $n = 20$ 10 при $n = 20$ 12 при $n = 8$ 14 при $n = 6$
Предельная длина в км отдельного хода при измерении линий другими методами	15	5	3
Длина стороны хода в км: наименьшая наибольшая	0,25 2,00	0,12 0,80	0,08 0,35
Предельная относительная невязка хода	1:25 000	1:10 000	1:5 000
Средняя квадратическая ошибка измерения угла (по невязкам ходов)	2''	5''	10''
Средняя квадратическая ошибка измерения длины	до 0,5 км – 2 см от 0,5 км до 1 км – 3 см свыше 1 км – 1:40 000	до 1 км – 3 см свыше 1 км – 1:30 000	до 1 км – 5 см

В государственных геодезических сетях полигонометрические ходы бывают 1-го, 2-го, 3-го и 4-го классов точности; однако, в соответствии с рекомендациями новой инструкции о построении государственных геодезических сетей 2001 года издания основным способом создания государственных сетей становятся спутниковые измерения, а полигонометрические ходы классной точности будут применяться только в геодезических построениях специального назначения.

Проектирование полигонометрии. Все работы по созданию геодезических сетей методом полигонометрии выполняются по проектам, составляемым в специализированных отделах геодезических предприятий на основе всех официально утверждённых инструкций, руководств и постановлений.

Для проверки на местности проекта, составленного на топографической карте, выполняют рекогносцировку, которая производится, как правило, в два этапа.

На первом этапе устанавливают наличие изменений, произошедших на местности с момента создания топографической карты, и, если таковые произошли, то выясняют их влияние на параметры запроектированных работ; в случае необходимости вносят коррективы в проект. Проверяется взаимная видимость между соседними пунктами полигонометрических ходов, особенно по сомнительным направлениям и на узловых точках систем ходов. Проверяют наличие растительности по направлениям ходов, отыскивают обходы препятствий и т.п. Каждый ход полигонометрии должен быть отрекогносцирован так, чтобы визирный луч при измерениях проходил не ближе 0,5 м от препятствий.

Трасса намеченного хода должна быть удобной для угловых и линейных измерений, особенно при параллактическом методе измерения расстояний или с помощью дальномера и инварных проволок. В условиях города следует учитывать интенсивность движения транспорта, а в необжитых районах – наличие подъезда к пунктам.

Второй этап рекогносцировки – это перенос проекта в натуру с выбором наиболее удобного места для каждого запроектированного пункта. Здесь следует руководствоваться

определёнными правилами. Во первых, пункты полигонометрии должны располагаться примерно на равных расстояниях один от другого; место закладки пункта выбирают так, чтобы обеспечить их долговременную сохранность (нельзя ставить пункты на проезжей части дорог, на затопляемых или сырых участках местности, на свеженасыпанных грунтах и т.д. Следует помнить и о правилах техники безопасности: нельзя располагать пункты близко к железным дорогам, к линиям электропередач, к постоянно работающим механизмам и т. п.

Типы центров. На застроенных территориях, в населённых пунктах и на промплощадках пункты следует закладывать в фундаменты и стены капитальных зданий (бетонных или кирпичных) с помощью стенных марок. При закладке грунтовых центров надо учитывать расположение подземных коммуникаций и перспективную застройку территории.

Выбранные места закладки центров отмечают временными центрами: кольями, металлическими штырями, составляют абрисы с привязкой к постоянным предметам не менее чем тремя промерами.

Центры геодезических пунктов служат для точного обозначения места пункта и долговременной его сохранности. Центры имеют различную конструкцию; каждая конструкция называется типом центра и имеет своё обозначение, например тип 5 г.р., 6 г.р. и т.д. Тип центра выбирается в зависимости от физико-географических условий района работ, особенно от характера грунта и глубины промерзания (или оттаивания), и назначения пункта. Центры изготовляют либо из бетона, либо из металлических труб, заполненных бетоном и защищённых от коррозии. В бетонные блоки или металлические трубы заделываются специальные чугунные марки, в середине которых имеется полусферический выступ с отверстием (или просто крест); центр этого отверстия обозначает точку на местности, координаты и отметка которой определяются в дальнейшем из измерений. На марках или на верхней грани бетонных блоков ставят номер пункта. Есть специальные нормативные документы на закрепление центров геодезических пунктов на местности “Центры и реперы государственной геодезической сети СССР”, “Центры геодезических пунктов на территории городов, посёлков и промышленных площадок”, “Руководство по применению стенных знаков в полигонометрических и теодолитных ходах”.

Конструкции центров на территории городов, посёлков городского типа, на промплощадках делятся на две группы: для незастроенных территорий - грунтовые центры и для застроенной части - стенные центры. Они предназначены как для плановых, так и для высотных сетей; разрешается также устанавливать геодезические пункты на крышах капитальных зданий.

Пункты 4-го класса, 1-го и 2-го разрядов закрепляются центрами типа 5 г.р. и 6 г.р. Первый состоит из двух бетонных монолитов в виде усечённой четырёхгранной пирамиды, поставленных один на другой (рис.40); на верхней грани каждого блока крепится марка; центры марок должны находиться на одной вертикальной линии. Центр типа 6 г.р. представляет собой один бетонный монолит в виде усечённой четырёхгранной пирамиды с заделанной в него металлической трубой; марка центра крепится к верхней части трубы; нижняя часть трубы заделывается в бетон и крепится двумя металлическими стержнями-якорями. Над центром устанавливается чугунный колпак с крышкой и опорными бетонными кольцами или кирпичной кладкой.

Центры, закладываемые в стены и фундаменты зданий и сооружений, имеют типы 7 г.р. и 8 г.р. Центры закладываются на высоте 0,5м – 1,0 м от земной поверхности

Если между пунктами полигонометрических ходов нет видимости с земли, или пункты располагаются на крышах зданий, то для обеспечения видимости при угловых и линейных измерениях на некоторых пунктах устанавливают наружные знаки: тур, простую пирамиду, пирамиду-штатив.

Тур – это каменный, кирпичный, бетонный или железобетонный столб высотой 1,2 м, который возводится над маркой центра; визирная цель крепится либо на специальной пирамиде, либо непосредственно на туре.

Простые пирамиды (трёхгранные, четырёхгранные, металлические или деревянные) и пирамиды-штативы сооружают на пунктах, с которых наблюдения выполняются с земли. На время наблюдений на пирамиды-штативы устанавливают веши для поднятия стандартной визирной цели на соответствующую высоту с помощью специальных

трубчатых элементов с растяжками. Ось визирной цели должна располагаться на одной отвесной линии с центром марки, в противном случае необходимо определять элементы редукции визирной цели.

На каждый построенный знак составляется карточка типовой формы; если необходимо, то определяются элементы центрировки и редукции.

Техника безопасности при постройке знаков и закладке центров. При производстве работ по постройке геодезических знаков должны приниматься необходимые меры для соблюдения требований техники безопасности каждым членом бригады на всех процессах. Требования по технике безопасности для работающих в полевых условиях изложены в “Правилах по технике безопасности на топографо-геодезических работах”.

Кроме постройки знаков строительные бригады ведут различные работы, связанные с постройкой: лесозаготовку, перевозку грузов, переезды на различных видах транспорта и пешком. Поэтому обязательным является также соблюдение указаний отдельных действующих специальных инструкций и правил по технике безопасности при лесозаготовках, при использовании автомобильного, водного, авиационного и других видов транспорта, при работе в горах, заболоченных районах, в песках, при использовании различного специального оборудования (бензопил, буровых установок, электрооборудования).

Для усвоения требований указанных правил и инструкций все работники, направляемые на постройку геодезических знаков, должны пройти обучение. Такая учёба проводится по программам на базах партий или на месте постройки первого пункта со строгой проверкой усвоения каждым работающим необходимых правил и приёмов работ. Программы составляют в экспедициях с учётом местных условий работы, видов транспорта, высот знаков и т.д.

Лиц, не прошедших учёбу и не сдавших экзамены, допускать к работам категорически запрещается.

Важнейшим условием соблюдения установленных требований техники безопасности является строгая трудовая дисциплина. Нарушение требований по технике безопасности недопустимо и должно немедленно и строго пресекаться.

Руководитель строительной бригады обязан поддерживать необходимую в полевых условиях бытовую и производственную гигиену и санитарию.

ТОЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ УГЛОВ

Устройство, поверки и исследования точных теодолитов

В процессе измерений можно выделить несколько составляющих:

- объект измерения,
- измерительный прибор,
- наблюдатель (оператор),
- методика измерения, реализующая достижения теории,
- внешние условия, в которых выполняются измерения.

При переходе к более точным измерениям приходится, во-первых, более тщательно готовить объект измерения, во-вторых, подбирать более точный прибор и соответствующим образом выполнять его исследования и поверки, в-третьих, разрабатывать и применять более совершенную методику измерений и, наконец, более тщательно учитывать влияние внешних условий на результаты измерений. Кроме того, большое значение приобретает правильная (строгая) обработка измерений.

В СССР и позднее в РФ оптические теодолиты делятся по точности измерения углов на три группы:

- высокоточные теодолиты со средней квадратической ошибкой измерения горизонтальных углов $0,5'' - 1,0''$;
- точные теодолиты со средней квадратической ошибкой измерения горизонтальных углов $2'' \div 7''$;
- технические теодолиты со средней квадратической ошибкой измерения горизонтальных углов $10'' \div 30''$;

К точным теодолитам относятся теодолиты Т2 и Т5; по ГОСТу 10529-96 предусматривается выпуск теодолитов в двух вариантах: с трубой прямого и обратного

изображения. В шифре теодолита на первом месте может стоять цифра 2, 3 или 4 в соответствии с номером модификации теодолита; после цифр точности теодолита могут стоять буквы А, М, К, П. Буква А означает автоколлимационный, буква М – маркшейдерский, буква К – компенсатор вместо уровня при вертикальном круге, буква П – прямое изображение в зрительной трубе.

С 1976 года в СССР начали выпускать теодолиты 2-й серии 2Т2 и 2Т5, а с 1989 – теодолиты 3-й серии 3Т2 и 3Т5; их характеристики приведены в таблице 10.

Таблица 10

Характеристики теодолитов	3Т2КП	3Т5КП
Увеличение зрительной трубы	30 ^x	30 ^x
Угол поля зрения трубы	1°40′	1°40′
Диаметр объектива	40 мм	40 мм
Наименьшее расстояние визирования	1,5 м	1,5 м
- с насадкой на объектив	0,9 м	0,9 м
Диаметр лимбов (горизонтального и вертикального)	90 мм	90 мм
СКО измерения - горизонтального угла	2″	4,5″
- вертикального угла	2″	8″
Диапазон работы компенсатора	3,5′	4′
Цена деления шкалы отсчётного устройства	1″	1′
Точность отсчитывания	0,1″	0,1′
Цена деления уровней – цилиндр. при алид. гор. круга	15″	30″
- круглого установочного	5′	5′
Встроенный оптический центрир: - увеличение трубы	2,5 ^x	2,5 ^x
- пределы визирования	от 0,8 м	от 0,8 м
Масса: - теодолита	4 кг	3,7 кг
- подставки	0,7 кг	0,7 кг

В теодолитах 3-й серии диаметр лимбов горизонтального и вертикального лимбов одинаков (до этого диаметр лимба вертикального круга был меньше, чем диаметр лимба горизонтального круга); кроме того, применяется труба прямого изображения и компенсатор углов наклона теодолита вместо уровня при алидаде вертикального круга. В 1996 году был издан ГОСТ 10529-96, по которому начался выпуск теодолитов 4-й серии; имеются сведения, что в 2002 году должен быть издан новый гост на общие технические условия теодолитов.

Для измерения углов в полигонометрии 4-го класса рекомендуется применять теодолиты Т2 и 2Т2; в полигонометрии 1-го и 2-го разрядов – теодолиты Т2, 2Т2, Т5 и их модификации. Разрешается применять также другие отечественные теодолиты и теодолиты зарубежного производства, обеспечивающие нужную точность измерения углов.

В комплект теодолита для точных измерений углов входят также визирные марки и оптические центриры. Этот комплект заводского изготовления называется КВЦ (комплект визирных целей); он включает 4 визирные марки, 3 подставки, 3 штатива с отвесом, 1 оптический двусторонний центрир ОДО, 1 вешку и некоторые другие мелкие приспособления.

Теодолит Т2 - оптический теодолит с цилиндрической неповторительной системой вертикальных осей с поворотным горизонтальным лимбом, оптическим микрометром с раздвижными клиньями и оптическим центриром. Прибор устанавливается на подставке, которая прикрепляется к штативу с помощью треугольной металлической пластины и станкового винта. Прибор входит во втулку подставки и закрепляется винтом.

Зрительная труба теодолита астрономическая (то есть, даёт обратное изображение) с апохроматической коррекцией и с внутренней фокусировкой; увеличение трубы 25^x; угол зрения 1° 30′; диаметр выходного зрачка 1,4 мм; фокусное расстояние объектива 250 мм. Оптическими компонентами зрительной трубы являются телеобъектив, включающий две склеенные пары линз, пятилинзовый окуляр и одиночная фокусирующая линза (всего десять линз)

Для фокусирования трубы на предмет служит фокусирующее кольцо; установка окуляра по глазу производится вращением диоптрийного кольца. Сетка нитей имеет

кроме креста пару дальномерных штрихов с коэффициентов дальномера 100. Сетку можно перемещать при помощи исправительных винтов в горизонтальном и вертикальном направлениях. Для грубого наведения трубы на визирную цель имеются визиры, расположенные на верхней и нижней сторонах трубы. В поле зрения визира виден светлый крест, который визуально нужно совмещать с наблюдаемой целью.

Система вертикальных осей теодолита цилиндрическая, неповторительная с опорой в нижней части на шарикоподшипник, установленный на сферическом самоустанавливающемся подпятнике. Полая ось алидады находится внутри втулки, к которой примыкает ось горизонтального круга (лимба). Внутри оси алидады находится объектив оптического центрира; зрительная труба центрира имеет увеличение $2,5^{\times}$; пределы визирования от 0,3 м до бесконечности; сетка нитей центрира представляет собой две концентрические окружности. Окуляр оптического центрира выведен на колонку теодолита; он устанавливается по глазу вращением оправы; фокусирование на центр пункта выполняется выдвиганием или вдвиганием окулярного колена вдоль оптической оси.

Теодолит имеет стеклянные горизонтальный и вертикальный угломерные круги, лимбы которых разделены через $20'$ от 0° до 360° . Диаметр горизонтального круга 90 мм, вертикального – 65 мм. Перестановка горизонтального лимба осуществляется специальным винтом, который сначала нужно утопить внутрь и затем вращать до установки на лимбе нужного отсчёта. Штрихи горизонтального лимба двойные (бифилярные), вертикального – одинарные. Поле зрения горизонтального круга имеет белый фон, поле зрения вертикального круга – жёлто-зелёный фон. Переключение лимбов производится специальной рукояткой: когда она занимает горизонтальное положение, используется горизонтальный круг, когда она занимает вертикальное положение – вертикальный круг. Поворот рукоятки следует выполнять до её фиксации (в момент фиксации слышен лёгкий щелчок).

Алидада горизонтального круга имеет закрепительный и наводящий соосные винты; ту же конструкцию имеют закрепительный и наводящий винты зрительной трубы.

Для приведения оси вращения алидады в вертикальное положение служит цилиндрический уровень на корпусе алидады горизонтального круга; юстировочный винт уровня выведен на колонку теодолита; цена деления уровня $15''$.

Горизонтальная ось теодолита (ось вращения зрительной трубы) жёстко связана с корпусом трубы; своими цапфами ось установлена на лагерах. На одном конце оси укреплен вертикальный круг, на другом – втулка с хомутиком, связывающим ось с наводящим винтом трубы. Цилиндрический уровень при алидаде вертикального круга расположен внутри колонки; изображение концов пузырька уровня передаётся на поворотную призму-лупу с помощью системы призм; цена деления уровня $20''$. Концы пузырька совмещаются установочным винтом уровня (микрометричным винтом алидады вертикального круга).

В качестве отсчётного приспособления в теодолите Т2 используется оптический микрометр, который имеет две пары оптических клиньев, барабан, шкалу и отсчётный индекс для взятия отсчёта по шкале микрометра. Шкала микрометра разделена на 600 делений, которые проходят около отсчётного индекса за то время, за какое изображения штрихов лимба смещаются на половину деления, то есть, на $10'$; таким образом, цена одного деления шкалы микрометра равна $1''$.

Теорию оптического микрометра с оптическими клиньями мы рассматривать не будем ввиду её сложности, а принцип оптического микрометра рассмотрим на примере плоскопараллельной пластинки (рис.43).

Стеклянная пластинка с параллельными гранями имеет толщину d мм и коэффициент преломления n_c больший единицы; луч света падает на неё снизу под углом падения равным i . В точке падения луча на границе двух сред с разными коэффициентами преломления (у воздуха он равен единице $i_g = 1,00$) происходит преломление луча, и вместо направления AD луч пойдёт по направлению AC ; угол преломления будет равен i_1 ($i_1 < i$). В точке C произойдёт повторное преломление луча, и луч пойдёт по направлению CF , параллельному направлению AD под углом преломления, равным i . В результате двойного преломления на стеклянной плоскопараллельной пластинке луч света не изменит своего направления, но сместится в

сторону на величину h , численное значение которой зависит от толщины пластинки, её коэффициента преломления и угла падения i ; выведем формулу для h .

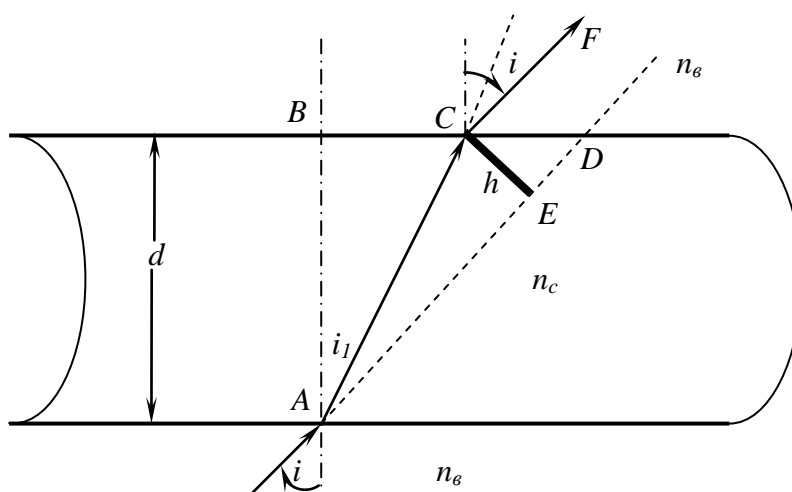


Рисунок 43 – Ход лучей через плоскопараллельную пластинку

В точке A запишем формулу закона преломления

$$n_g \cdot \sin(i) = n_c \cdot \sin(i_1).$$

Считая $i_g = 1$ и учитывая, что угол i мал по величине ($i < 15^\circ$), разложим синус угла в ряд и ограничимся одним первым членом разложения ($\sin(i) = i$ в радианной мере); получим

$$i = n_c \cdot i_1.$$

Обозначим разность углов i и i_1 через δ , получим $\delta = i - i_1 = n_c \cdot i_1 - i_1 = i_1 \cdot (n_c - 1)$. Далее выразим смещение луча h через толщину пластинки из треугольника ACE

$$h = AC \cdot \sin(\delta) = \frac{d}{\cos(i_1)} \cdot \sin(\delta).$$

Приняв $\cos(i_1) = 1$ и $\sin(\delta) = \delta$ и подставив $i_1 = i/n_c$, получим

$$h = d \cdot \delta = d \cdot (n_c - 1) \cdot i_1 = d \cdot \frac{n_c - 1}{n_c} \cdot i = c \cdot i;$$

здесь величина $c = d \cdot \frac{n_c - 1}{n_c}$ является характеристикой пластинки, для данной пластинки она постоянна.

Таким образом, можно сформулировать закон плоскопараллельной пластинки: при прохождении плоскопараллельной пластинки луч света, не меняя своего направления, смещается в сторону на величину, пропорциональную углу падения луча на пластинку.

Используя эту закономерность, можно сконструировать отсчётное устройство, в котором измерение доли деления основной шкалы будет выполняться по вспомогательной шкале, связанной с механизмом поворота плоскопараллельной пластинки. Интервал поворота пластинки должен соответствовать одному делению основной шкалы и общей длине вспомогательной шкалы, которую можно разбить на большое число делений, соответствующее проектной точности измерения. Вспомогательная шкала называется шкалой микрометра; для отсчитывания по ней должен быть и свой отсчётный индекс. Ввиду малых размеров делений шкалы микрометра их рассматривают через микроскоп с увеличением не менее двадцати.

Нарисуем схему расположения основных частей оптического микрометра с плоскопараллельной пластинкой при взятии отсчёта по лимбу (рис.44). Пусть цена деления лимба $\lambda = 20'$, количество делений на шкале микрометра $n = 120$, цена одного

деления микрометра $\mu = \lambda / n = 10''$, точность отсчитывания $t = 1''$; минутные деления на шкале микрометра подписаны.

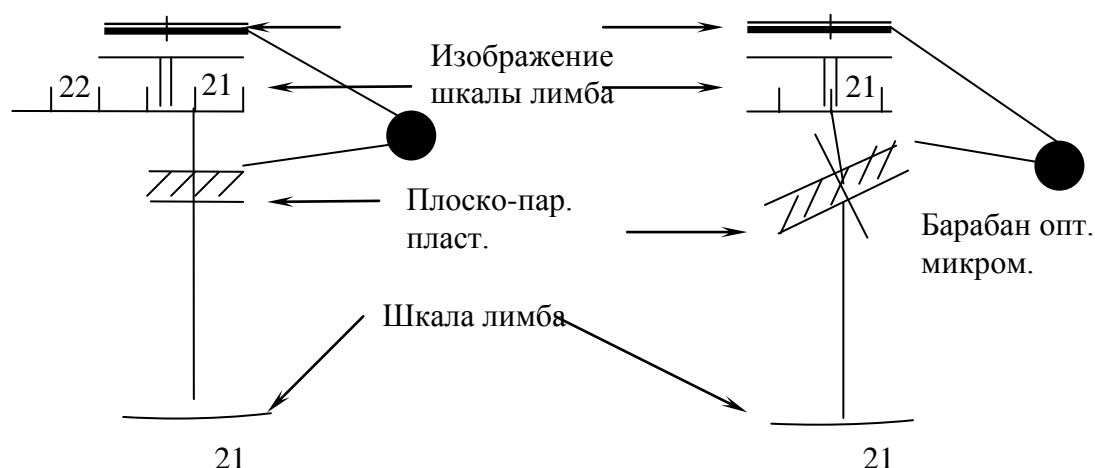


Рисунок 44 – Схема оптического микрометра

В исходном положении лучи света падают на плоскопараллельную пластинку перпендикулярно её граням (то есть, $i = 0^0$); на шкале оптического микрометра стоит отсчёт $0'00''$, так как пластинка занимает нейтральное положение. Отсчётный индекс шкалы лимба (биссектор) находится между штрихами 21^0 (младший штрих) и 22^0 (старший штрих). Для измерения доли деления лимба от младшего штриха до отсчётного биссектора поворачивают пластинку на некоторый угол i . Лучи, идущие от штрихов лимба, смещаются относительно неподвижного биссектора, и, когда изображение штриха 21^0 совместится с биссектором, вращение пластинки прекращают. При повороте пластинки шкала микрометра движется, в результате чего на ней против отсчётного индекса шкалы микрометра (одиночный штрих) устанавливается отсчёт, соответствующий углу i .

Полный отсчёт по лимбу будет равен $N = N_{\text{мл}} + N_{\text{шкалы}} = 21^0 + 13'40'' = 21^0 13'40''$.

Конструкция оптического микрометра с двусторонним отсчитыванием включает две пары оптических клиньев; верхние клинья каждой пары - подвижные. В поле зрения такого микрометра видны изображения штрихов диаметрально противоположных частей лимба и в другом окне - деления шкалы микрометра и отсчётный индекс шкалы микрометра – неподвижный штрих (рис.45). При вращении барабана микрометра штрихи верхнего и нижнего изображений перемещаются в противоположные стороны, то-есть, совмещение штрихов лимба производится через половину деления лимба, и поэтому длина шкалы микрометра равна половине деления лимба.

Поле зрения отсчётного микроскопа теодолита Т2 показано на рис.45; там видно два окошка – большое (оно слева) и малое (оно справа). В левом окошке сверху видно изображение штрихов основной стороны лимба, внизу – изображение штрихов диаметрально противоположной стороны. При вращении барабана микрометра эти изображения двигаются в противоположные стороны. Каждый градус лимба подписан и разделён на три части (цена одного деления шкалы лимба $20''$).

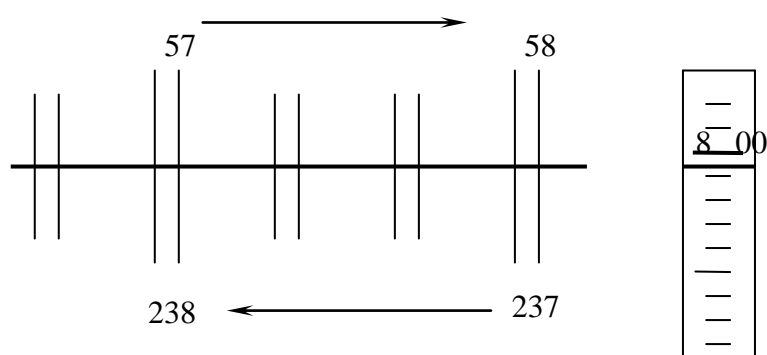


Рисунок 45 – Поле зрения оптического микрометра теодолита Т2

Отсчёт по лимбу с помощью оптического микрометра выполняется в следующем порядке:

1. Вращением барабана микрометра тщательно совмещают изображения штрихов верхней и нижней частей левого окошка (если это сделать затруднительно, то совмещают изображения штрихов хотя бы в центре поля зрения);
2. Записывают число градусов по верхнему изображению штрихов; нужный градус располагается слева от центра поля зрения или в самом центре поля зрения и так, чтобы градусный штрих нижнего изображения, отстоящий от него на 180^0 , был справа или точно в центре поля зрения;
3. Считают число двадцатиминутных интервалов между этими двумя штрихами и записывают десятки минут отсчёта, как произведение числа интервалов на $10'$;
4. В правом окошке напротив неподвижного горизонтального отсчётного индекса отсчитывают по шкале микрометра минуты, секунды и десятые доли секунд, последние оцениваются на глаз.

Отсчёт по лимбу на рис.45 равен $57^0 38' 00,6''$.

Порядок отсчитывания по вертикальному кругу такой же, но перед взятием отсчёта здесь нужно привести пузырёк уровня при вертикальном круге точно в нуль-пункт с помощью микрометричного винта алидады вертикального круга. Формулы для вычисления места зенита MZ и зенитного расстояния Z имеют вид

$$MZ = \frac{L + P + 360^0}{2}$$

$$Z = \frac{L - P + 360^0}{2}, \quad Z = L - MZ, \quad Z = MZ - P.$$

В этих формулах через L и P обозначены отсчёты по вертикальному кругу при круге лево и круге право соответственно.

Для измерения углов при малых зенитных расстояниях в комплекте теодолита имеется призмная насадка на окуляр, которая изменяет направление визирной оси трубы и оптической оси отсчётного микроскопа на 90^0 и обеспечивает, таким образом, удобство в работе при обоих положениях вертикального круга.

Теодолит 2Т2. Принцип устройства теодолита 2Т2 не отличается от теодолита Т2, но некоторые конструктивные решения у него другие. Зрительная труба теодолита 2Т2 имеет меньшие размеры и ахроматическую коррекцию; увеличение трубы $27,5^x$, фокусное расстояние объектива 218,6 мм. Сетка нитей зрительной трубы установлена неподвижно, причём её перекрестие отцентрировано относительно оптической оси трубы. Между корпусом и осью вращения трубы расположено клиновое кольцо для устранения коллимационной ошибки; для поворота клинового кольца к прибору прилагается специальный ключ.

Для ускорения установки горизонтального круга имеется круг-искатель, разделённый через 10^0 ; отсчёт по кругу-искателю выполняется через небольшой иллюминатор. К теодолиту прилагается ориентир-буссоль.

Особенностью теодолита 2Т2 является и новая система отсчитывания по микроскопу. Отсчёт десятков минут берут по вспомогательной шкале, расположенной под подписью градусов; штрихи лимба видны в отдельном окошке. Отсчёт по кругу производится в следующем порядке:

- тщательно совместить изображения штрихов лимба в среднем окошке;
- в верхнем большом окошке отсчитать число градусов (в пределах шкалы десятков минут);
- отсчитать десятки минут по цифре, расположенной под центром симметрии подписи градусов (по другим источникам – под единицами градусной подписи);
- в правом окошке против отсчётного индекса отсчитать единицы минут, десятки, единицы и десятые доли секунд.

Отсчёт по вертикальному кругу производится в том же порядке.

Поверки точных теодолитов. Теодолит, как прибор для точного измерения горизонтальных и вертикальных углов, должен удовлетворять определённым механико-технологическим и геометрическим условиям.

Главными механико-технологическими условиями являются:

- свободное, плавное и правильное перемещение всех подвижных частей прибора;
- жёсткость и прочность конструкции, обеспечивающие постоянство взаимного расположения его рабочих частей;
- надёжность и устойчивость прибора при полевой эксплуатации, высококачественное изготовление уровней, точное и чёткое нанесение сеток нитей;
- обеспечение заданных параметров зрительной трубы, отсчётной системы и оптического компенсатора;
- высокоточное изготовление и сборка осевых систем;
- точное разделение и нанесение тонких штрихов лимбов, шкал, индексов;
- герметичность конструкции и т.д.

Геометрические условия вытекают из принципа измерения горизонтальных и вертикальных углов; с основными геометрическими условиями теодолитов студенты знакомятся в процессе изучения начального курса геодезии. Перечислим основные геометрические условия теодолита Т2 (рис.46):

- Ось цилиндрического уровня UU при алидаде горизонтального круга должна быть перпендикулярна к оси вращения алидады ZZ ;
- Визирная ось VV зрительной трубы должна быть перпендикулярна к оси HH вращения трубы;
- Вертикальная нить ss сетки нитей должна лежать в коллимационной плоскости зрительной трубы;
- Ось HH вращения зрительной трубы должна быть перпендикулярна к оси ZZ вращения алидады;
- Место зенита MZ вертикального круга должно быть постоянным и близким к нулю;
- Визирная ось $ЦЦ$ оптического отвеса должна совпадать с осью ZZ вращения алидады.

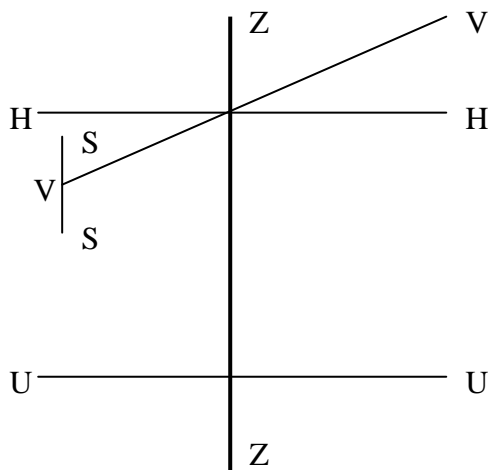


Рисунок 46 – Схема геометрических осей теодолита

Методика выполнения первых пяти поверок теодолитов изложена в начальном курсе геодезии [3].

Коллимационная ошибка относится к симметричным ошибкам; она искажает отсчеты по лимбу при КЛ и КП на одну и ту же величину, но с противоположными

знаками. Однако, более тщательные исследования показывают, что коллимационная ошибка не остается постоянной во времени. Этот факт в методике точных измерений учитывается следующим образом: в приеме для каждого направления вычисляется значение коллимационной ошибки и проверяется, чтобы их расхождение не превышало некоторого значения, которое устанавливается для каждого класса работ.

Неравенство подставок у точных теодолитов проверяется по общей методике [3]; если неравенство подставок обнаружено, оно должно быть исправлено в мастерской.

Наклон оси вращения алидады у точных теодолитов учитывается по положению пузырька уровня при алидаде горизонтального круга: во время измерения угла одним приемом пузырек не должен отклоняться от нульпункта более, чем на 2 деления. Корректировать горизонтирование теодолита разрешается только между приемами.

Проверка оптического центрира. Устанавливают теодолит на штативе и приводят его ось вращения в вертикальное положение с помощью выверенного цилиндрического уровня на алидаде горизонтального круга. Отмечают на листе бумаги, подложенном под штатив, проекцию середины кружка оптического центрира. Затем медленно вращают алидаду вокруг вертикальной оси и наблюдают за изображением точки. Если в процессе вращения изображение точки остаётся на месте или смещается с центра кружка не более 0,5 мм, то условие считается выполненным. В противном случае отвинчивают два винта и отсоединяют крышку оптического центрира от боковой крышки теодолита, обнажая головки юстировочных винтов. Слегка освободив эти винты, перемещают окулярное колено в плоскости боковой крышки, после чего поверку повторяют. У теодолитов 2-й серии и старше (2Т2, 3Т2 и т.д.) юстировку оптического отвеса выполняют в мастерской путём поворота и перемещения оправы с призмой, изменяющей направление визирной оси оптического отвеса на 90^0 .

Проверка компенсатора. У теодолитов с компенсатором проверяется ещё одно условие: компенсатор отсчётной системы вертикального круга должен обеспечивать неизменность отсчёта по вертикальному кругу при наклоне оси вращения алидады в пределах, указанных для данного прибора.

Для проверки точности работы компенсатора выбирают точку визирования и устанавливают теодолит так, чтобы один из подъёмных винтов подставки был расположен в направлении выбранной точки. Приводят пузырёк уровня при алидаде горизонтального круга в нуль-пункт, наводят трубу на точку и берут отсчёт по вертикальному кругу. Затем наведение трубы на точку и взятие отсчёта повторяют. Поворачивают алидаду на 90^0 и подъёмным винтом подставки, расположенным по направлению на выбранную точку, наклоняют теодолит на 2 – 3 деления уровня. Опять дважды наводят трубу на точку и берут отсчёты по вертикальному кругу. Разность средних из двух отсчётов не должна превышать точности теодолита.

Исследование точных теодолитов. Исследования геодезических приборов вообще и теодолитов в частности могут быть общими и текущими. Общие исследования выполняются при получении новых приборов или после капитального ремонта, а также в профилактических целях в межсезонный период. Текущие исследования выполняются ежегодно перед выездом на полевые работы и имеют целью определить:

- неустраняемые отклонения от геометрических и оптико-механических условий с целью введения необходимых поправок в результаты измерений;
- постоянные прибора;
- ошибки шкал измерительных приспособлений;
- качество работы отдельных частей и механизмов прибора и прибора в целом.

При проведении текущих исследований проверяют:

- правильность работы оптического микрометра (систематические ошибки оптического микрометра, ошибки совмещения штрихов горизонтального и вертикального кругов, мёртвый ход винта оптического микрометра;
- рен оптического микрометра;
- систематические ошибки измерения углов, связанные с люфтом подъёмных винтов и смещением горизонтального круга;
- эксцентриситет горизонтального круга;
- эксцентриситет алидады горизонтального круга;
- цену деления уровня;

- правильность работы фокусирующей линзы;
- СКО измерения горизонтального угла;
- СКО измерения вертикального угла.

Исследование полных ошибок делений лимба выполняют лишь у высокоточных теодолитов, которые используются для измерения углов в сетях 1, 2, 3 классов; в методике точных измерений углов для ослабления этих ошибок предусмотрена перестановка лимба между отдельными приемами измерения угла.

Определение рена отсчетного устройства. Реном называют разность между номинальным значением цены деления лимба (или полуделения лимба) и её значением, измеренным по шкале отсчётного устройства.

У шкалового микроскопа значение рена допускается 0.2 деления шкалы микроскопа; если фактическое значение рена превышает этот предел, теодолит подлежит ремонту в мастерской.

Методика определения рена оптического микрометра зависит от конструкции микрометра. У оптического микрометра с односторонним отсчитыванием подвижной оптической деталью является плоскопараллельная пластинка, и длина шкалы микрометра равна одному делению лимба. Для отсчета по лимбу имеется неподвижный биссектор, а для отсчета по шкале микрометра - неподвижный отсчётный индекс-штрих. Рен такого микрометра определяют по разности отсчетов по микрометру при совмещении с биссектором двух соседних штрихов лимба.

У оптического микрометра с двухсторонним отсчитыванием определяют рен верхнего изображения штрихов лимба и рен нижнего изображения. Измерение расстояния между соседними штрихами верхнего изображения выполняется с помощью одного из штрихов нижнего изображения, наоборот, измерение расстояния между соседними штрихами нижнего изображения выполняется с помощью одного из штрихов верхнего изображения.

Сначала устанавливают отсчёт по шкале микрометра $0'00''$ и точно совмещают штрих A верхнего изображения со штрихом $(A \pm 180^\circ)$ нижнего изображения (рис.47) и берут близкий к нулю отсчет a по шкале микрометра со знаком ("плюс" - отсчётный индекс ниже деления $0'00''$, "минус" - отсчётный индекс выше деления $0'00''$). Затем вращают барабан оптического микрометра до конца его шкалы и точно совмещают штрих $(A - \lambda)$ верхнего изображения со штрихом $(A \pm 180^\circ)$ нижнего изображения и берут по шкале микрометра отсчет b со знаком ("плюс" - отсчётный индекс ниже деления $10'00''$, "минус" - отсчётный индекс выше деления $10'00''$). Затем точно совмещают штрих A верхнего изображения со штрихом $(A \pm 180^\circ - \lambda)$ нижнего изображения (эта пара штрихов находится справа от предыдущей пары штрихов – при отсчёте b) и берут отсчет c со знаком. Рен верхнего изображения вычисляют по формуле $r_g = a - b$, и рен нижнего изображения по формуле $r_n = a - c$.

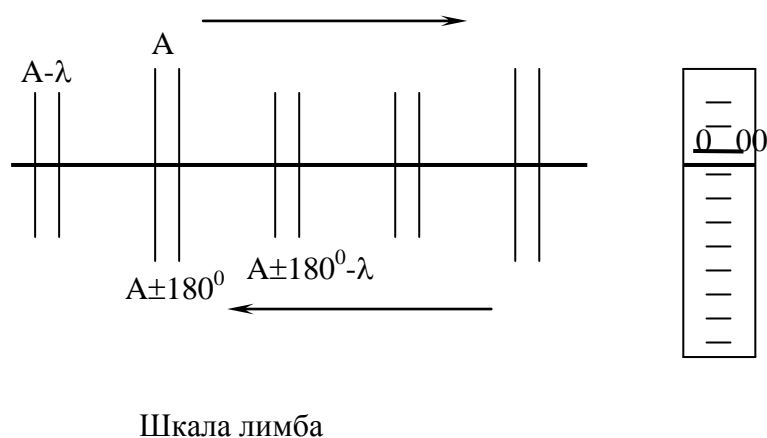


Рисунок 47 – Схема определения рена оптического микрометра Шкала микрометра

При исследовании теодолитов рен оптического микрометра определяют на разных частях лимба, переставляя его через $45^\circ 20'$. Из всех определений вычисляют среднее значение рена r_{cp} и разность ренов Δr

$$r_{cp} = \frac{1}{2} \cdot (r_e + r_n) \quad \text{и} \quad \Delta r = r_e - r_n.$$

Если значение рена превышает $2''$, то в каждый отсчет по лимбу вводится поправка за рен

$$\delta r = \frac{2r_{cp}}{\lambda} \cdot c,$$

где: c - отсчет по шкале микрометра в минутах,

λ - цена деления лимба, $\lambda = 20'$.

При большом значении рена (больше $5''$) теодолит нужно сдать в мастерскую для юстировки.

Эксцентриситеты горизонтального круга. В плоскости лимба различают три точки: главная точка Д – центр окружности делений лимба, Л – центр вращения лимба (точка пересечения оси вращения лимба с плоскостью лимба), А – центр вращения алидады (точка пересечения оси вращения алидады с плоскостью лимба). В идеале все три точки должны совпадать, но в реальном инструменте они не совпадают: несовпадение точки А с точкой Д называется эксцентриситетом алидады, несовпадение точки Л с точкой Д называется эксцентриситетом лимба, несовпадение точек А и Л называется эксцентриситетом осей. Исследование эксцентриситетов горизонтального круга выполняют по методике, изложенной в Инструкции [8]. Эксцентриситет лимба и эксцентриситет алидады оптических теодолитов исследуют по одной и той же методике, только при определении эксцентриситета алидады переставляют алидаду через 30° от 0° до 330° в прямом и обратном направлениях, а при определении эксцентриситета лимба переставляют лимб через 30° от 0° до 330° также в прямом и обратном направлениях.

При каждой установке лимба сначала совмещают изображения диаметрально противоположных штрихов лимба и берут отсчет t , затем совмещают изображение верхнего штриха с неподвижным индексом в поле зрения отсчётного микроскопа и берут отсчет t' . Изменение разности $v = t - t'$ характеризует величину эксцентриситета. При отсутствии неподвижного индекса его роль может выполнять любая неподвижная точка в поле зрения оптического микрометра. По данным исследования строят график изменения величины v и проводят на нем плавную кривую типа синусоиды; отклонение точек графика от синусоиды не должно быть больше $15''$.

Затем вычисляют эксцентриситет осей и максимальный эксцентриситет, значение которого не должно превышать $40''$. В теодолитах с двусторонним отсчитыванием (именно к таким теодолитам относятся теодолиты серий Т2) влияние эксцентриситета на отсчёт по лимбу исключается, однако значительная его величина может привести к изменению рена на разных частях круга, поэтому предельное значение эксцентриситета инструкцией ограничено.

В теодолитах с односторонним отсчитыванием (типа Т5) каждый отсчёт по лимбу искажён на величину эксцентриситета, поэтому методика измерений разрабатывается так, чтобы исключить влияние эксцентриситета.

Устройство и проверки визирных марок и оптических центриров

В полигонометрии визирными целями (ВЦ) являются визирные марки, которые устанавливаются на штативы над закреплёнными на местности пунктами с помощью оптических центриров.

Визирная марка. Основными деталями визирной марки являются подставка, одинаковая по конструкции с подставкой теодолита, и металлический щиток, укрепленный на втулке, которая вставляется в подставку. Обе стороны щитка окрашены; цвет фона и рисунок окраски у разных марок бывает различным. На щитке вертикально нанесена чёрная полоса; средняя линия этой полосы – ось симметрии ВЦ марки, – служит линией для визирования на неё зрительной трубой теодолита. Марка окрашивается специальной флуоресцентной эмалью, повышающей яркость фона марки, что позволяет наблюдать марку на расстоянии до 5 км. Марка имеет круглый установочный уровень.

Визирная марка должна удовлетворять двум геометрическим условиям:

- ось круглого уровня должна быть параллельна оси вращения визирной марки; поверка этого условия выполняется по стандартной методике поверки круглого уровня;
- ось симметрии визирной марки должна совпадать с осью вращения марки. Для поверки этого условия с помощью иглы фиксируют на верхней части марки её ось вращения, и затем измеряют теодолитом три направления: два направления n_1 и n_2 - на края щитка (левый и правый) и одно направление n - на иглу. Несимметрия визирной цели относительно оси вращения марки, выраженная в линейной мере, вычисляется по формуле

$$a = \frac{\delta_\beta \cdot S}{2 \cdot \rho},$$

где $\delta_\beta = (n - n_1) - (n - n_2)$; S - расстояние от теодолита до визирной марки.

Пример: $S = 10\text{ м}$; $m_1 = 0^\circ 01' 14''$; $n_2 = 0^\circ 54' 11''$; $n = 0^\circ 27' 46''$; $n - n_1 = 26' 32'' = 1592''$;
 $n_2 - n = 26' 25'' = 1585''$; $a = \frac{7'' \cdot 10^4 \text{ мм}}{2 \cdot 2,06 \cdot 10^5} = 0,18 \text{ мм}$.

Величина несимметрии не должна превышать 1 мм; при большем её значении марка бракуется.

Оптический центрир. Оптические центриры бывают двух видов: с прямой зрительной трубой и ломаной зрительной трубой. Оптический центрир с прямой зрительной трубой представляет собой короткофокусную трубу, вращающуюся в подставке; увеличение трубы равно $2,5^x \div 4^x$. Центрир имеет цилиндрический уровень с ценой деления, одинаковой с ценой деления уровня на алидаде горизонтального круга теодолита ($15''$). Окулярный конец трубы имеет крышку с полусферической поверхностью, на которой нанесена крестообразная насечка.

Оптический двусторонний центрир ОДО имеет ломаную зрительную трубу, позволяющую центрировать подставку над и под точкой местности; центрир имеет два цилиндрических уровня, расположенные перпендикулярно один к другому. Поверки оптического центрира:

- Оси цилиндрических уровней должны быть перпендикулярны к оси вращения центрира; эта поверка выполняется по стандартной методике поверки цилиндрических уровней;
- Визирная ось зрительной трубы оптического центрира должна совпадать с осью его вращения.

Центрирование подставки над центром пункта выполняется с помощью оптического центрира по той же методике, что и центрирование теодолита; затем в подставку вставляется визирная марка или теодолит.

Методика точного измерения горизонтальных и вертикальных углов

При точных измерениях горизонтальных углов применяют, как правило, способ круговых приёмов; этим способом измеряют углы на пунктах, где имеется больше двух направлений. На пунктах, где имеется всего лишь два направления, измерения производят способом отдельного угла (способом приёмов) без замыкания горизонта. Количество приёмов зависит от типа теодолита и класса геодезической сети (таблица 11); допуски на результаты измерений приведены в таблице 12.

Таблица 11 - Количество приёмов измерения горизонтальных углов

Приборы	П О Л И Г О Н О М Е Т Р И Я		
	4 класс	1 разряд	2 разряд
Теодолит Т2	6	2	2
Теодолит Т5	-	3	2

Направления на стенные знаки в полигонометрии 4 класса измеряют тремя круговыми приёмами после окончания измерения углов по ходу.

Таблица 12 - Допуски на характеристики точности измерений углов в полигонометрии

Основные характеристики точности угловых измерений	Д о п у с к и	
	Для теодолита Т2	Для теодолита Т5
Расхождение направлений в полуприёмах	8,0''	0,2'
Расхождение направлений в приёмах	8,0''	0,2'
Колебание значений 2С в приёме	12,0''	-
Колебание между повторными наблюдениями начального направления (незамыкание горизонта)	8,0''	0,2'
Колебание направлений в приёмах	8,0''	0,2'

В полигонометрии 1-го и 2-го разрядов измерение направлений на стенные знаки производится по программе измерений углов хода. При привязке к стенным знакам колебания направлений, приведённых к общему нулю, в отдельных приёмах не должны превышать 10'' при расстояниях менее 10 м и 15'' при расстояниях до 10 м от вспомогательного пункта до стенных знаков.

При измерении углов на примычном пункте расхождения между значениями измеренного и исходного углов должны быть не более: 6'' в полигонометрии 4 класса, 10'' в полигонометрии 1-го разряда и 20'' в полигонометрии 2-го разряда.

Подготовка к измерению горизонтального угла теодолитом заключается в правильной установке теодолита и визирных целей относительно центров пунктов, фиксирующих угол на местности. При установке теодолита и визирных целей на штативы их центрирование нужно выполнять с помощью оптического центрира.

В полигонометрии 4-го класса и 1-го и 2-го разрядов для ослабления влияния ошибок центрировки и редукции применяют так называемую трёхштативную систему, которая предусматривает расстановку трех или более штативов с подставками под теодолит и визирную марку сразу на нескольких пунктах подряд и центрирование штативов с помощью оптического центрира (рис.48).

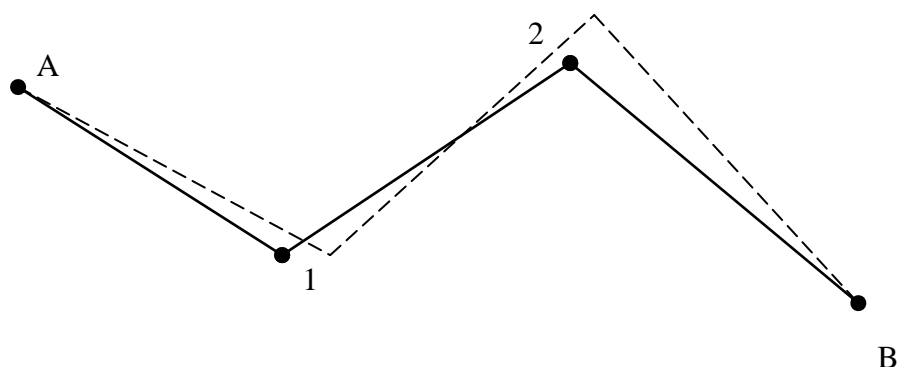


Рисунок 48 – Трёхштативная система

На штативе пункта 1 устанавливают теодолит, а на штативах пунктов А и 2 - визирные марки. Для измерения следующего угла теодолит переносят на пункт 2, марку со штатива А - на штатив 1, а марку со штатива 2 - на штатив 3 и т.д. до конца хода. В результате измеренными оказываются углы так называемого "воздушного" полигонометрического хода, а не хода, образованного центрами пунктов. На угловую

невязку хода влияют ошибки центрирования только на двух пунктах - на начальном и на конечном исходных пунктах хода.

Если для измерения сторон хода используется светодальномер или электронный тахеометр, то одновременно с измерением углов можно выполнить измерение сторон по тем же штативам.

Центрирование теодолита или штатива с подставкой с помощью оптического центрира можно выполнить по той же методике, что и с помощью нитяного отвеса, однако, на практике часто применяют так называемый "неправильный способ", который позволяет быстро и с нужной точностью выполнить сразу две операции: центрирование и горизонтирование подставки или теодолита. Порядок действий в этом способе:

1. штатив установить примерно над центром пункта;
2. вращая подъемные винты (любые и в произвольном направлении) совместить в поле зрения окуляра оптического центрира изображение центра пункта Ц с центром концентрических окружностей С;
3. вращая алидаду, установить уровень при алидаде горизонтального круга параллельно линии, соединяющей острия двух ножек штатива;
4. уменьшая или увеличивая длину одной из этих ножек, установить пузырек уровня в нульпункт с точностью одно-два деления,
5. повернуть алидаду на 90^0 (т.е. установить уровень по третьей ножке штатива);
6. изменяя длину этой ножки, привести пузырек уровня в нульпункт с точностью одно-два деления.

Действия со 2-го по 6-е составляют одно приближение. Если центр пункта располагается в плоскости Т, проходящей через острия трех ножек штатива, то достаточно одного - двух приближений. Если центр пункта находится выше или ниже плоскости Т, то после 1-го приближения следует сначала оценить в поле зрения оптического центрира расстояние от центра пункта до точки С – центра концентрических окружностей. При выполнении 2-й операции 2-го приближения следует установить центр Ц на некотором расстоянии от центра С; величину и направление этого расстояния следует оценивать опытным путём.

В заключение точное горизонтирование теодолита (подставки) выполняют подъёмными винтами, то есть, приводят пузырёк уровня точно в нульпункт по обычной методике.

Теория "неправильного способа" основывается на том факте, что при вращении подъёмных винтов точка поворота визирной оси оптического центрира лежит в плоскости, проходящей через острия подъёмных винтов, а при изменении длины ножки штатива точка поворота оси лежит в плоскости Т. В первом случае поворот подъёмного винта приводит к большому перемещению конца оси, а во втором случае один конец этой оси практически не изменяет своего положения, в то время как пузырек уровня испытывает наклон этой оси в полной мере и заметно смещается.

При установке теодолита на столик геодезического сигнала и визировании на визирные цилиндры сигналов нужно выполнять определение элементов центрировки и редукции и вводить в измеренные направления поправки, вычисляемые по известным формулам [3].

Способ круговых приёмов. На пункте стояния теодолита выбирают начальное направление с хорошей видимостью; остальные направления нумеруют по ходу часовой стрелки (рис49).

Затем выполняют следующие операции:

КЛ (круг лево):

- установить на лимбе отсчёт, близкий к нулю, и навести трубу на пункт начального (первого) направления; взять отсчёт по лимбу и записать его в журнал (таблица 13);
- вращая алидаду по ходу часовой стрелки, навести трубу последовательно на пункт второго направления, третьего направления и т.д., беря каждый раз отсчёты по лимбу и записывая их в журнал; снова навести трубу на пункт начального

- направления, взять отсчёт по лимбу и записать его в журнал; вторичное наведение трубы на начальное направление называется замыканием горизонта;
- перевести трубу через зенит, установив КП (круг право);

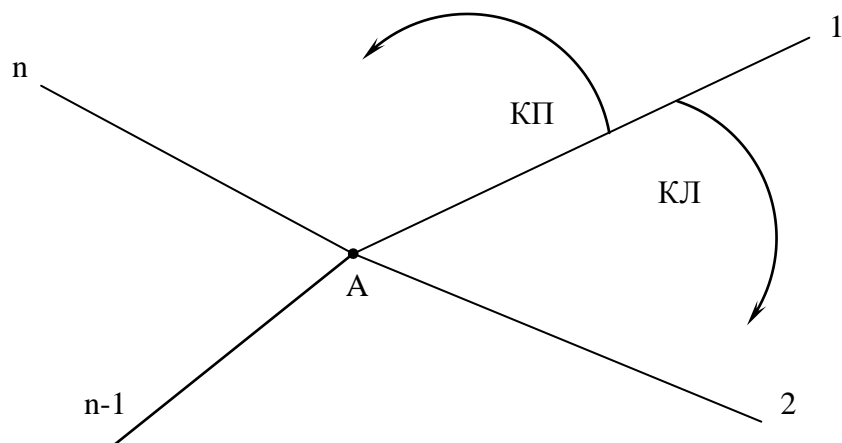


Рисунок 49 – Способ круговых приёмов измерения углов

КП (круг право):

- навести трубу на пункт начального направления, взять отсчёт по лимбу и записать его в журнал;
- вращая алидаду против хода часовой стрелки, навести трубу последовательно на пункт последнего направления, затем - предпоследнего направления и т.д., беря каждый раз отсчёты по лимбу и записывая их в журнал; снова навести трубу на пункт начального направления, взять отсчёт по лимбу и записать его в журнал;

Затем для каждого направления вычисляют среднее из отсчётов при КЛ и КП, значения $2C$ – двойной коллимационной ошибки, незамыкание горизонта при КЛ и КП, среднее незамыкание горизонта, поправки в измеренные направления за незамыкание горизонта, исправленные значения направлений и направления, приведённые к начальному нулю (таблица 13). Контроли и допуски как для одного приёма, так и для всех приёмов приведены выше (таблица 12).

Таблица 13 - Образец журнала измерения углов способом круговых приёмов

Названи е направл ений	Круг (порядо к действи ий)	Отсчёт ы по штриха м лимба	Отсчёты по микрометру		$\frac{a_1 + a_2}{2}$	$2C = \text{КЛ} - \text{КП}$	$\frac{\text{КЛ} + \text{КП}}{2}$	Значения направле ний
1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	КЛ (1) КП (8)	0^0 01' 180 01	08,3'' 26,0	09,2'' 28,3	08,8'' 27,2	-18,4''	18,0'' -0,0	$0^0 00' 00,0$ ''
В	КЛ (2) КП (7)	76 09 256 09	29,8 48,1	31,0 49,0	30,4 48,6	-18,2	39,5 -0,4	76 08 21,1
10	КЛ (3) КП (6)	270 08 90 08	39,6 54,0	40,9 55,0	40,2 54,5	-14,3	47,3 -0,8	270 97 28,5
8	КЛ (4) КП (5)	0^0 01' 180 01	10,5 27,0	10,0 29,1	10,2 28,1	-17,9	19,2 -1,2	

Незамыкание: $\Delta_{\text{КЛ}} = +1,4''$; $\Delta_{\text{КП}} = +0,9''$; $\Delta_{\text{ср}} = +1,2''$.

В способе круговых приёмов ослабляется влияние ошибок, действующих пропорционально времени, так как средние отсчёты по лимбу для всех измеренных направлений относятся к одному физическому моменту времени.

Измерение отдельного угла (способ приёмов) применяется, когда на пункте стояния теодолита всего два направления; его методика изучается в начальном курсе геодезии [3].

Влияние внешних условий при точных измерениях углов может существенно исказить результаты измерений. Во первых, сам теодолит подвергается воздействию солнца, ветра, влажности; чтобы ослабить это воздействие, рекомендуется защищать теодолит зонтом и шторками. Во вторых, такие явления, как боковая рефракция, колебание и качество изображений могут увеличить ошибку визирования.

Ошибки от влияния внешних условий могут быть как случайными, так и систематическими. В результате многолетних исследований установлены наиболее благоприятные периоды для измерения горизонтальных углов: это утренняя видимость - спустя полчаса после восхода солнца и до 9 часов местного времени, и вечерняя видимость с 16 - 17 часов до полчаса до захода солнца. В пасмурную погоду при слабом ветре периоды хорошей видимости могут длиться всё светлое время суток, исключая плюс – минус полчаса до и после восхода солнца и до и после захода солнца.

Вертикальные углы (углы наклона и зенитные расстояния). Вертикальные углы измеряются для вычисления превышений в тригонометрическом нивелировании, которое применяется для определения высот пунктов государственной геодезической плановой сети 1, 2, 3, 4 классов, для построения геодезических съёмочных сетей и для производства наблюдений за осадками инженерных сооружений.

Основным источником ошибок при измерении вертикальных углов является вертикальная рефракция. Коэффициент вертикальной рефракции может быть определен по разным методикам: 1) по измеренному зенитному расстоянию с точки 1 на точку 2 и известным отметкам этих точек; 2) по одновременно измеренным зенитным расстояниям с точки 1 на точку 2 и с точки 2 на точку 1; 3) по метеорологическим данным.

Как показали многолетние исследования, зимний период вообще непригоден для точных измерений вертикальных углов, так как зимой влияние рефракции в два с лишним раза больше, чем летом. Лучшим временем измерения вертикальных углов является время от 9 часов утра до 17 часов пополудни местного времени при четких изображениях визирных целей. Программа измерений углов наклона или зенитных расстояний, как правило, состоит из 4 - 6 приёмов; допустимое расхождение углов в приёмах зависит от конкретных условий и колеблется от 15" в государственной триангуляции до 1" - 5" при наблюдениях за осадками инженерных сооружений. При точных измерениях вертикальных углов измерение высоты теодолита над центром пункта рекомендуется выполнять непосредственно с помощью рулетки, аналитическим способом и с помощью нивелира и рейки.

ТОЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ РАССТОЯНИЙ

Измерение расстояний мерными проволоками

В геодезических сетях сгущения (полигонометрия 4-го класса и 1-го и 2-го разрядов) относительная ошибка измерения сторон в среднем равна $1/40000$, $1/30000$, $1/20000$ соответственно. С помощью мерных лент и мерных рулеток при измерении расстояний по земле можно достичь точности измерений $1/3000$, не лучше. Для более точных измерений нужно применять компарированные стальные рулетки и мерные инварные проволоки, натягиваемые с постоянной силой в подвешенном состоянии между штативами или кольями. Для измерения расстояний с точностью $1/10000$ можно использовать оптические дальномеры типа REDTA- 002, длиномер или применять параллактический метод, однако, наиболее эффективным оказывается применение светодальномеров.

Мерная инварная проволока изготавливается из сплава инвар, состоящего из железа (64%), никеля (35,5%) и различных примесей (0,5%): углерода, кремния, марганца и др. для придания инвару тягучести, ковкости, твёрдости. Инвар обладает хороший

теплопроводностью, почти не окисляется, хорошо поддаётся обработке и полировке. Коэффициент линейного расширения инвара равен $0,5 \cdot 10^{-6}$, что в 24 раза меньше, чем у стали ($12 \cdot 10^{-6}$). Недостатком инвара является слабая стабильность во времени, что вынуждает подвергать инварные проволоки “старению” в течение около двух лет. Для хранения и транспортировки проволока наматывается на барабан из лёгкого сплава диаметром 0,5 м, установленный в деревянный ящик. Проволоки компарируются в первые годы после их изготовления 3 раза в год; спустя три - четыре года компарирование делают лишь перед началом полевого сезона и после его окончания.

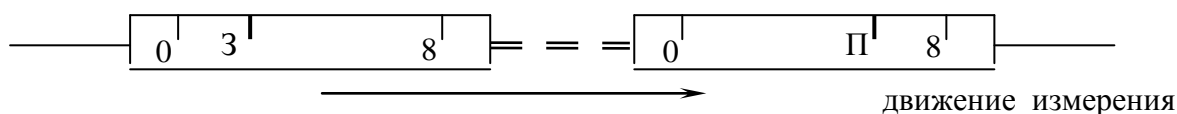
Каждая проволока имеет свое уравнение, которое в общем виде представляется так

$$l = l_0 + \Delta l + \alpha \cdot l_0 \cdot (t - t_0) + \beta \cdot l_0 \cdot (t - t_0)^2$$

здесь: l - фактическая длина проволоки, l_0 - номинальная длина проволоки, Δl - постоянная поправка, получаемая из компарирования (сравнения проволоки с эталоном) при температуре t_0 , t - температура проволоки во время измерений, α, β - температурные коэффициенты расширения инвара, определяемые при компарировании; коэффициент β используется только при высокоточных измерениях расстояний.

Инварная проволока имеет длину 24 метра и диаметр поперечного сечения 1,65 мм. На обоих концах проволоки расположены шкалки с миллиметровыми делениями; шкалки нанесены на жёсткие пластины треугольного сечения; длина шкалок 80 мм. Расстояние между нулями шкалок у проволоки, подвешенной и растянутой с помощью стандартного оборудования, должно быть 24,000 м; отклонение от этой величины допускается не более 1 мм.

При измерениях по шкалкам производят отсчёты с точностью до десятых долей миллиметра, отсчёт по передней шкалке обозначается буквой П, а по задней – буквой З; тогда длина отрезка, измеренного с помощью одного уложения проволоки, равна $s = l_0 + \Delta l + (П - З)$.



Мерные приборы, включающие мерную инварную проволоку, называются базисными приборами; в СССР выпускались базисные приборы трёх видов: БП-1, БП-2, БП-3. Первые два прибора применялись в государственных геодезических сетях, последний – БП-3, - в сетях сгущения (полигонометрия 1-го и 2-го разрядов). В комплект базисного прибора БП-3 входят: три проволоки, инварная лента длиной 6,1 м, два блочных станка с гирями, два блока, два оптических центрира, десять базисных штативов с целиками, рейка для нивелирования целиков, барабан для проволок, барабан для ленты, шесть карабинов для проволок, четыре струны с крючками, четыре термометра-праща для измерения температуры воздуха и другие мелкие принадлежности.

Методика измерения линии проволоками включает 3 операции:

- подготовку линии к измерениям,
- производство измерений,
- вычисление длины линии.

Подготовка линии заключается в расстановке штативов строго в створе линии на расстоянии длины проволоки ($24 \text{ м} \pm 1 \div 3 \text{ см}$). Расстановка штативов выполняется с помощью теодолита методом “на себя” от конца линии к её началу; при этом используется металлическая рулетка.

Измерение длины линии заключается в установке целиков на штативы, нивелировании целиков и измерении расстояний между соседними целиками. Измерение расстояний выполняют методом отсчётов. Отсчёты по шкалам проволоки с точностью до 0,1 мм производят два наблюдателя по команде руководителя работ, который записывает отсчёты в журнал, вычисляет разности ($П - З$), контролирует полученные разности и вычисляет среднее из трёх разностей с точностью до 0,01 мм. После первых отсчётов проволоку немного сдвигают по створу линии и делают вторую пару отсчётов; затем

сдвигают проволоку ещё раз и снова берут пару отсчётов. Колебание разностей $(П-3)$ не должно превышать 1 мм в полигонометрии 1-го и 2-го разрядов. Одновременно с измерением линии (в начале и в конце линии) измеряют температуру воздуха.

Длину линии, приведенную к горизонту, вычисляют по формуле

$$s' = n \cdot (l - l_0) + \sum (П - 3)_{cp} + \Delta s_t + \Delta s_h + \sum r$$

где: $(П - 3)_{cp}$ - средняя разность отсчётов по передней и задней шкалам проволоки,

$$\Delta s_t - \text{поправка за температуру}; \quad \Delta s_t = \alpha \cdot l \cdot (t_{cp} - t_0) \cdot n;$$

α - линейный коэффициент расширения инвара, t_{cp} - средняя температура мерного прибора при измерении линии в n пролётов, t_0 - температура компарирования;

$$\Delta s_h - \text{поправка за приведение длины линии к горизонту}, \quad \Delta s_h = \sum \Delta l_h, \quad \text{где}$$

$$\Delta l_h = -\frac{h_{cp}^2}{2l} - \frac{h_{cp}^4}{8l^3};$$

h_{cp} - превышение между соседними целиками;

$\sum r$ - сумма остатков; измеренное значение r' каждого остатка исправляется поправками за компарирование, за температуру и за приведение к горизонту $r = r' + \Delta r_k + \Delta r_t + \Delta r_h$;

$$\Delta r_k = \frac{\Delta l}{l} \cdot r'; \quad \Delta r_t = \alpha \cdot r' \cdot (t - t_0); \quad \Delta r_h = -\frac{h^2}{2r'} - \frac{h^4}{8r'^3}.$$

Источниками ошибок при измерении расстояний проволоками являются:

- ошибка компарирования проволоки,
- ошибка установки в створ штативов,
- ошибка натяжения проволоки,
- ошибка нивелирования целиков,
- ошибка измерения температуры проволоки,
- ошибка от действия ветра,
- ошибка от неустойчивости штативов,
- ошибка отсчетов по шкалам проволоки.

Длина линии на плоскости проекции Гаусса вычисляется по формуле

$$S_{\Gamma} = s' + \Delta s_H + \Delta s_Y,$$

где: Δs_H - поправка за приведение длины линии к уровню моря, $\Delta s_H = -s' \cdot \frac{H}{R}$;

H - средняя высота линии над уровнем моря, R - радиус Земли;

Δs_Y - поправка за приведение длины линии на плоскость проекции Гаусса,

$$\Delta s_Y = s' \cdot \frac{Y^2}{2R^2};$$

Y - средняя ордината линии (расстояние линии от осевого меридиана зоны),

При тщательном соблюдении требований методики измерений базисные приборы могут обеспечить ошибку измерения расстояний 1:750000 (БП-1), 1:200000 (БП-2) и 1:100000 (БП-3).

Параллактический метод измерения расстояний

Исторический и теоретический интерес представляет параллактический метод измерений расстояния, который был впервые применен в начале 19-го века русским геодезистом и астрономом В.Я. Струве.

Отрезок $MN = b$ называется базисом (рис.50); его длина b должна быть известна с высокой точностью; измеряемой линией является сторона $AM = s$ треугольника AMN . Из этого треугольника по теореме синусов имеем

$$s = b \cdot \frac{\sin(\varphi + \gamma)}{\sin \varphi},$$

или

$$s = b \cdot \cos \gamma + b \cdot \sin \gamma \cdot \operatorname{Ctg} \varphi. \quad (3.6)$$

При условии, что угол γ близок к 90° , а угол φ мал по величине, из формулы (3.6) можно получить формулу для подсчета средней квадратической ошибки расстояния, вычисленного из параллактического треугольника,

$$\left(\frac{m_s}{s}\right)^2 = \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{m_\varphi}{\varphi}\right)^2.$$

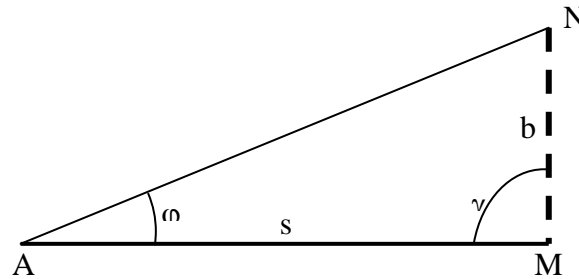


Рисунок 50 – Простейшее параллактическое звено

Базис b можно измерить с очень высокой точностью, то первым слагаемым в правой части можно пренебречь; кроме того по малости угла φ его можно выразить $\varphi = \frac{b \cdot \rho}{s}$,

и тогда

$$\frac{m_s}{s} = \frac{m_\varphi}{\rho} \cdot \frac{s}{b}.$$

Более сложным вариантом является параллактическое звено с симметричным (рис.51) или несимметричным базисом (рис.52).

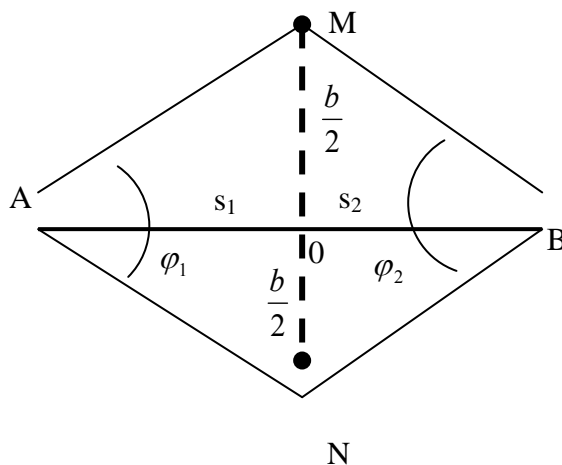


Рисунок 51 – Ромбическое звено
с симметричным базисом

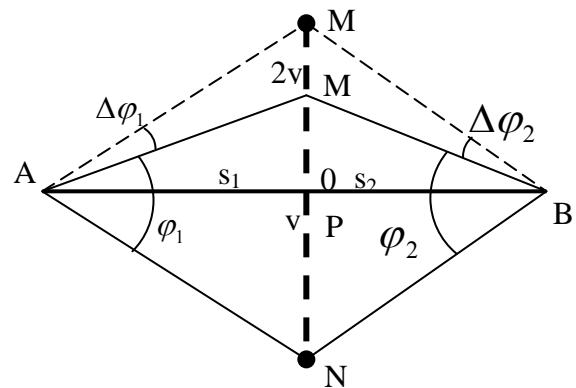


Рисунок 52 – Ромбическое звено
с несимметричным базисом

Если базис MN перпендикулярен к линии AB длиной s , причём линией AB базис делится пополам, и измерены параллактические углы φ_1 и φ_2 , то

$$s_1 = \frac{b}{2} \cdot \operatorname{Ctg}\left(\frac{\varphi_1}{2}\right), \quad s_2 = \frac{b}{2} \cdot \operatorname{Ctg}\left(\frac{\varphi_2}{2}\right), \quad s = s_1 + s_2.$$

Относительная ошибка измерения длины линии с помощью ромбического звена вычисляется по формуле

$$\frac{m_s}{s} = \frac{m_\varphi}{\varphi \cdot \sqrt{2}};$$

то есть, при одинаковых условиях ромбическое звено точнее треугольного звена.

При несимметричном базисе следует измерить отрезок $PO = y$, называемый несимметрией базиса, и тогда

$$s_1 = \frac{b + 2y}{2} \cdot \operatorname{Ctg}\left(\frac{\varphi_1 + \Delta\varphi_1}{2}\right),$$

$$s_2 = \frac{b + 2y}{2} \cdot \operatorname{Ctg}\left(\frac{\varphi_2 + \Delta\varphi_2}{2}\right),$$

$$s = s_1 + s_2.$$

Угловые величины $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ выражаются формулами

$$\operatorname{Sin}(\Delta\varphi_1) = \frac{2y}{b} \cdot \operatorname{Sin} \varphi_1 \quad \text{и} \quad \operatorname{Sin}(\Delta\varphi_2) = \frac{2y}{b} \cdot \operatorname{Sin} \varphi_2.$$

Формула средней квадратической ошибки расстояния, определённого из несимметричного ромбического звена одинакова с формулой для симметричного звена.

Угол φ по величине должен быть около 4° , точность его измерения – на уровне $2''$; длина базиса около $20 \div 50$ м; ошибка перпендикулярности базиса к измеряемой линии – около $5'$.

Для определения расстояний параллактическим методом необходимы следующие приборы: точный оптический теодолит со штативом, два оптических центрира, две-три визирные марки, два-три штатива и базисный прибор БП-2 или БП-3.

Линию измеряют два раза (по двум базисам); базисы измеряют базисным прибором. Параллактические углы измеряют точным теодолитом 4-6 приёмами; расхождение в приёмах не должно превышать $3''$. Угол при базисе (90°) измеряют одним приёмом.

Иногда в параллактическом методе используется постоянный базис; как правило – это натянутая инварная проволока длиной 24 м с закреплёнными на её концах визирными марками. Базис располагают перпендикулярно к измеряемой линии с ошибкой не более $2'$.

При $\frac{m_s}{s} = \frac{1}{10000}$ и величине параллактического угла $\varphi = 8^\circ$ измеряемое расстояние

должно быть не более 179 м, а при $\frac{m_s}{s} = \frac{1}{5000}$ – не более 340 м.

Существует также короткобазисный параллактический метод, в котором роль базиса выполняет инварный жезл длиной 2 м или 3 м с визирными марками. Для повышения точности измерений линию разбивают на несколько примерно одинаковых отрезков, и каждый отрезок измеряют отдельно; такой способ называют створно-короткобазисным параллактическим методом. На практике применяют как цельные жезлы (конструкции ЦТИСИЗ, С.Н. Веселовского, Гидропроекта и др.), так и разборные (стыковые) жезлы типа Бала (эти жезлы выпускают фирмы “Карл Цейсс Йена” ГДР и заводом МОМ в Венгрии). Как и любые геодезические приборы, мерные жезлы перед их использованием в полевых условиях должны быть проверены и исследованы.

Измерение расстояний светодальномерами

Светодальномер – это геодезический измерительный прибор, с помощью которого можно с высокой точностью измерять расстояния на местности. Он представляет собой электронный прибор, в котором формируется узко направленный пучок света с частотой от 3000 до 36000 МГц; этот пучок света модулируется по амплитуде низкочастотными электромагнитными колебаниями с частотой от 7,5 до 75 МГц (длина волны от 40 м до 4 м). Пучок света направляется на отражатель, и затем отражённый сигнал принимается. Измерению подлежит разность фаз низкочастотных колебаний, по которой и определяется расстояние от прибора до отражателя.

Формулы для вычисления расстояния имеют вид

$$D = \left(\frac{\varphi'}{2\pi} + \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \right) \cdot \frac{v}{2f};$$

здесь: φ' - часть разности фаз, кратная 2π , - это целое число N , $\Delta\varphi$ - часть разности фаз в пределах одного периода, соответствующая величине ΔN - домеру фазового цикла; полная разность фаз будет $\varphi = \varphi' + \Delta\varphi$; v - скорость распространения электромагнитных волн в атмосфере; f - частота колебаний. Поскольку длина волны $\lambda = \frac{v}{f}$, то $D = (N + \Delta N) \cdot \frac{\lambda}{2}$.

Величина $\frac{\lambda}{2}$ играет роль длины мерного прибора; величина N показывает, сколько раз эта длина укладывается в измеряемом расстоянии; величина ΔN показывает, какая доля длины мерного прибора равна остатку.

Значение N получают при измерении расстояния на нескольких частотах; этот процесс называется разрешением неоднозначности (кнопка “грубо” на панели прибора). Значение ΔN измеряется с помощью фазоизмерительного устройства с точностью от 2^0 до $0,5^0$, что соответствует ошибке в измеряемом расстоянии около 1 см.

Согласно ГОСТ 19223-90 “Светодальномеры геодезические. Общие технические условия” в нашей стране выпускаются светодальномеры четырёх типов (групп):

СГ - для государственных геодезических сетей;

СП - для прикладной геодезии и маркшейдерии;

СТ - для сетей сгущения и топографических съёмок;

СТД - для топографических съёмок (диффузное отражение).

Средняя квадратическая ошибка расстояния, измеренного светодальномером, выражается формулой

$$m_D = a + b \cdot D \cdot 10^{-6},$$

где a - константа в миллиметрах; b - константа в единицах шестого знака; D - расстояние в миллиметрах.

Для каждой группы светодальномеров коэффициенты a и b имеют свои значения:

СГ - ($0,1 \text{ км} \leq D \leq 30 \text{ км}$) $a = 1 \text{ мм}$; $a = 2 \text{ мм}$; $b = 1$; $b = 2$;

СП - ($0,001 \text{ км} \leq D \leq 5 \text{ км}$) $a = 0,1 \text{ мм}$; $a = 0,5 \text{ мм}$; $a = 1 \text{ мм}$; $a = 2 \text{ мм}$;

СТ - ($0,002 \text{ км} \leq D \leq 15 \text{ км}$) $a = 5 \text{ мм}$; $a = 10 \text{ мм}$; $b = 3$; $b = 5$;

СТД - ($0,002 \text{ км} \leq D \leq 500 \text{ м}$) $a = 20 \text{ мм}$.

Устройство конкретного светодальномера, порядок его проверок и исследований, правила подготовки к работе, методика измерения расстояний, обработка измерений, - всё это подробно описывается в документации, прилагаемой к каждому экземпляру светодальномера. Здесь следует подчеркнуть лишь то, что при измерении расстояний светодальномером обязательно выполняют определение метеоданных: температуры воздуха, давления и влажности. По этим величинам вычисляются поправки в расстояние за отклонение фактических метеоданных от некоторых стандартных значений, для которых подсчитаны постоянные прибора.

Приведём, например, некоторые характеристики светодальномера 2СТ10:

Диапазон измеряемых расстояний от 2 м до 10000 м;

Формула СКО измерения расстояний $5 \text{ мм} + 3 \cdot 10^{-6} \cdot D_{(\text{мм})}$ (то есть, $a = 5$ и $b = 3$);

Диапазон температур от -30^0C до $+40^0\text{C}$;

Потребляемая мощность 15 Вт;

Масса: светодальномера 5,5 кг;

всего комплекта 85 кг.

На панель управления светодальномера 2СТ10 вынесены цифровое табло для вывода измеренного расстояния в миллиметрах и некоторые кнопки и переключатели: для установки контрольного отсчёта, для регулировки подсветки сетки нитей, для

регулировки уровня сигнала, для переключения режимов работы, для переключения операций “наведение - счёт”, для учёта давления p и температуры t .

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА ПОЛИГОНОМЕТРИИ

Влияние внецентренности теодолита на измеряемое направление

После окончания полевых измерений и перед сдачей материалов в камеральный цех для строгого уравнивания результатов измерений выполняют предварительную обработку полигонометрических ходов или систем ходов. Этап предварительной обработки включает следующие процессы:

- проверка полевых журналов и центрировочных листов;
- составление рабочей схемы хода или системы ходов;
- вычисление поправок в измеренные углы за влияние центрировки теодолита и редукции визирной цели на всех пунктах;
- вычисление горизонтальных проложений измеренных расстояний, то есть, вычисление поправки за наклон линии (за превышение между концами линии); этот процесс называют также приведением расстояний к горизонту;
- вычисление поправок в горизонтальные проложения за влияние центрировки светодальномера и редукцию отражателя; если измерения расстояний выполнялись мерными приборами, то этот процесс не выполняется;
- вычисление поправок в горизонтальные проложения за высоту над уровнем моря и за переход к плоскости проекции Гаусса;
- вычисление рабочих координат пунктов.

Пусть на рис.53 ось вращения алидады пересекает горизонтальную плоскость в точке B_I , а точка B - проекция вершины измеряемого угла на ту же плоскость. Расстояние между точками B_I и B обозначим через l , расстояние между пунктами B и A – через S .

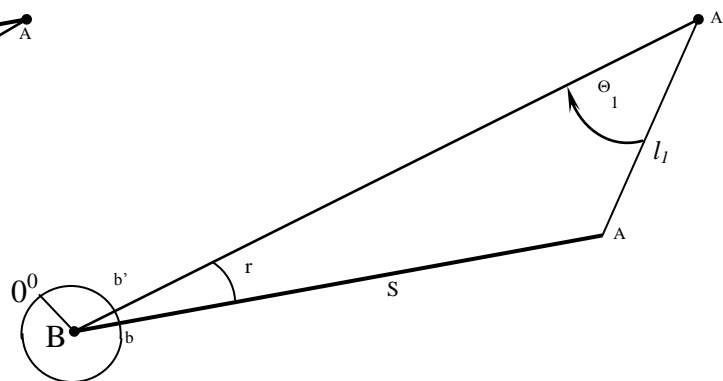
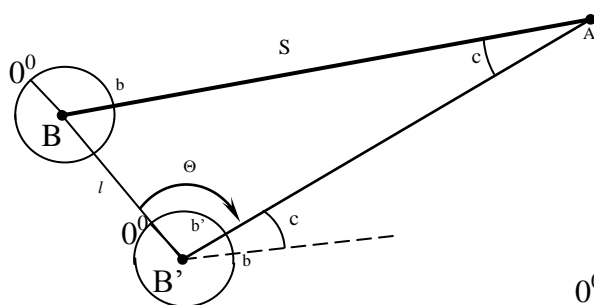


Рисунок 53 – Схема внецентренности теодолита

Рисунок 54 – Схема редукции визирной цели

Если бы теодолит стоял в точке B , то при наведении трубы на точку A отсчет по лимбу был бы равен b . Перенесем теодолит в точку B_I , сохранив ориентировку лимба; при этом отсчет по лимбу при наведении трубы на точку A изменится и станет равным b_I ; различие этих отсчётов называется ошибкой из-за центрировки теодолита и обозначается буквой c .

Из треугольника $BB_I A$ имеем

$$\frac{l}{\sin c} = \frac{S}{\sin \Theta},$$

откуда

$$Sinc = l \cdot \frac{\sin \Theta}{S},$$

$$\text{или по малости угла } c'' = l \cdot \frac{\sin \Theta}{S} \cdot \rho''.$$

Величина l называется линейным элементом центрировки, а угол Θ - угловым элементом центрировки; угол Θ строится при проекции оси вращения теодолита и отсчитывается от линейного элемента по ходу часовой стрелки до направления на наблюдаемый пункт A .

Правильный отсчет по лимбу будет

$$b = b_1 + c.$$

Влияние внецентренности визирной цели на измеряемое направление

Если проекция визирной цели (марки, вехи или визирного цилиндра) на горизонтальную плоскость A_1 не совпадает с проекцией центра наблюдаемого пункта A , то возникает ошибка редукции визирной цели (рис.54). Отрезок AA_1 называется линейным элементом редукции и обозначается l_1 ; угол Θ_1 называется угловым элементом редукции; он строится при проекции визирной цели и отсчитывается от линейного элемента по ходу часовой стрелки до направления на пункт установки теодолита. Обозначим правильный отсчет по лимбу - b , фактический - b_1 ; ошибка в направлении BA равна r .

Из треугольника BAA_1 можно написать

$$\frac{l_1}{\sin r} = \frac{S_1}{\sin \Theta_1},$$

$$\text{откуда} \quad \sin r = l_1 \cdot \frac{\sin \Theta_1}{S_1},$$

$$\text{или по малости угла} \quad r'' = l_1 \cdot \frac{\sin \Theta_1}{S_1} \cdot \rho''.$$

Правильный отсчет по лимбу будет

$$b = b_1 + r.$$

Наибольшего значения поправки c и r достигают при $\Theta = \Theta_1 = 90^\circ (270^\circ)$, когда $\sin \Theta = \pm 1$. В этом случае

$$c'' = \frac{l}{S} \cdot \rho'' \quad \text{и} \quad r'' = \frac{l_1}{S_1} \cdot \rho''.$$

При работе с техническими теодолитами допустимое влияние ошибок центрирования теодолита и редукции визирной цели можно принять $c=r=10''$; при среднем расстоянии между точками $S = 150 \text{ м}$ получается, что $l=l_1=0,9 \text{ см}$, то есть, теодолит можно центрировать с помощью нитяного отвеса. При точных измерениях углов в сетях сгущения допустимое значение ошибок центрировки и редукции следует принять $c=r=1''$, что при расстоянии $S = 500 \text{ м}$ приводит к условию $l=l_1 \leq 2,5 \text{ мм}$; такую точность центрирования теодолита и визирной марки можно обеспечить лишь с помощью оптического центрира.

Центрирование теодолита с помощью нитяного отвеса включает две операции:

- установка штатива при горизонтальном положении его верхней площадки примерно над центром пункта;
- перемещение теодолита по верхней площадке штатива до тех пор, пока отвес не окажется над центром пункта (с отклонением от него не более 5 мм).

Центрирование теодолита с помощью оптического центра обычно выполняют одновременно с горизонтированием; методика совместного центрирования и горизонтирования теодолита описана выше.

Приведение измеряемых расстояний к центрам пунктов

При измерении расстояния светодальномером может возникнуть ситуация, когда точное центрирование светодальномера и отражателя выполнить не удастся; в этом случае нужно ввести в измеренное расстояние поправки за центрировку и редукцию.

Пусть на рис.55 точка B обозначает центр пункта, а точка B_1 - проекцию на горизонтальную плоскость оси вращения светодальномера; точка A обозначает центр второго пункта. Измерим элементы центрировки: l - линейный элемент и Θ - угловой элемент; по аналогии с центрировкой теодолита (рис.53) угол Θ строится при проекции оси вращения прибора и отсчитывается от линейного элемента по ходу часовой стрелки до направления на наблюдаемый пункт A (рис.55).

В треугольнике BAB_1 угол при точке A очень мал, поэтому для четырёх положений точки B_1 относительно точки B будет выполняться одно из равенств: $\gamma = \Theta$, $\gamma = 180^\circ - \Theta$, $\gamma = \Theta - 180^\circ$ и $\gamma = 360^\circ - \Theta$. Опустим перпендикуляр из точки B_1 на линию BA и проведём дугу радиусом $S_{изм}$ с центром в точке A ; поправка за центрировку ΔS_c будет равна

$$\Delta S_c = -l \cdot \cos \Theta - h,$$

где h - стрелка сегмента, вычисляемая по формуле $h = S_{изм} \cdot (1 - \cos \varepsilon)$ или

$$h = \frac{l^2 \cdot \sin^2 \Theta}{2 \cdot S_{изм}}.$$

Аналогичные построения на пункте установки отражателя (A - центр пункта, A_1 - проекция оси вращения отражателя, l_1 - линейный элемент и Θ_1 - угловой элемент редукции, рис.56) позволяют написать формулу для вычисления поправки ΔS_r в измеренное значение расстояния за влияние редукции отражателя

$$\Delta S_r = -l_1 \cdot \cos \Theta_1 - h_1 \quad \text{и} \quad h_1 = \frac{l_1^2 \cdot \sin^2 \Theta_1}{2 \cdot S_{изм}}.$$

Расстояние S , приведенное к центрам пунктов будет равно

$$S = S_{изм} + \Delta S_c + \Delta S_r.$$

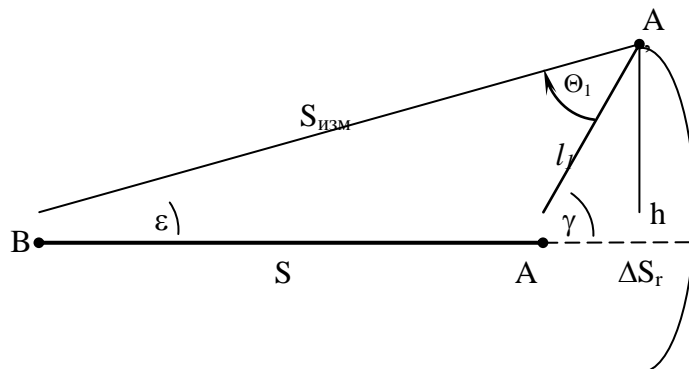
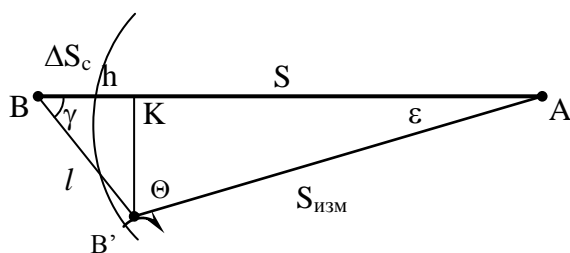


Рисунок 55 – Внецентренность светодальномера Рисунок 56 – Редукция визирной цели

Как показывают расчёты, влияние величин h и h_1 на поправки ΔS_c и ΔS_r невелико; если принять условие, что их суммарное относительное влияние на расстояние S не превышает $1/1\,000\,000$, то получаем практическое правило:

$$\frac{l}{S} \leq \frac{1}{1000} \quad \text{и} \quad \frac{l_1}{S} \leq \frac{1}{1000}.$$

Вычисление поправок за наклон линии, за высоту над уровнем моря и за переход к плоскости проекции Гаусса

Поправка за наклон линии. Пусть на местности измерена линия $AB = D$ с углом наклона ν и превышением h между точками A и B .

Горизонтальное проложение S вычисляют либо через угол наклона ($S = D \cdot \cos \nu$ или $S = D - \Delta D$, где $\Delta D = 2 \cdot D \cdot \sin^2 \frac{\nu}{2}$), либо через превышение ($S = D - \frac{h^2}{2D} - \frac{h^4}{8D^3}$).

Приведём вывод последней формулы. По теореме Пифагора имеем $D^2 = S^2 + h^2$ или $S^2 = D^2 - h^2$; далее пишем

$$S^2 = D^2 \cdot \left(1 - \frac{h^2}{D^2}\right); \quad S = D \cdot \left(1 - \frac{h^2}{D^2}\right)^{1/2}.$$

Второе слагаемое в скобках намного меньше единицы, поэтому разложим дробную степень скобки в ряд и ограничимся тремя членами разложения

$$\left(1 - \frac{h^2}{D^2}\right)^{1/2} = 1 - \frac{h^2}{2D^2} - \frac{h^4}{8D^4} - \dots,$$

Умножим это выражение на D и получим искомую формулу.

Поправка за высоту над уровнем моря. Эта поправка вводится в горизонтальное проложение линии для того, чтобы привести горизонтальное проложение линии к поверхности референц-эллипсоида, то есть, найти его горизонтальную проекцию S_0 . Выразим горизонтальное проложение S и горизонтальную проекцию S_0 через радиус Земли R , высоту H_A точки A и центральный угол ε , выраженный в радианах (рис.57),

$$S = (R + H_A) \cdot \varepsilon \quad \text{и} \quad S_0 = R \cdot \varepsilon.$$

Далее следует $\varepsilon = \frac{S_0}{R} = \frac{S}{R + H_A}$, откуда $S_0 = R \cdot \frac{S}{R + H_A} = S \cdot \left(1 + \frac{H_A}{R}\right)^{-1}$.

Разложим бином в ряд, ограничившись двумя членами разложения, и получим

$$S_0 = S \cdot \left(1 - \frac{H_A}{R}\right) = S - S \cdot \frac{H_A}{R}.$$

Можно написать $S_0 = S - \Delta S_H$, где $\Delta S_H = S \cdot \frac{H_A}{R}$, откуда $\frac{\Delta S_H}{S} = \frac{H_A}{R}$.

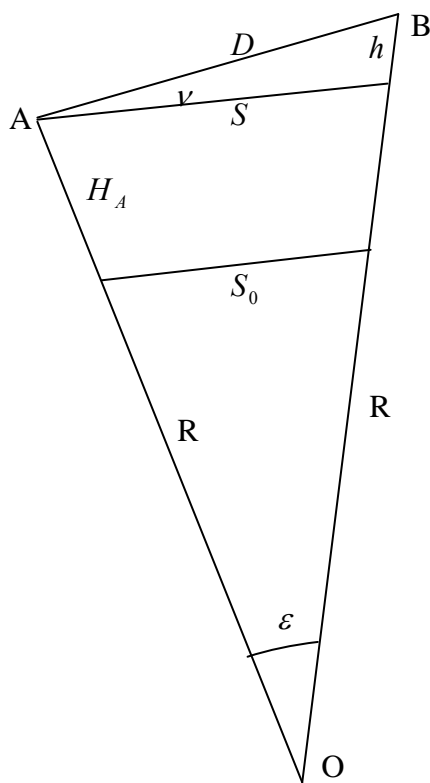


Рисунок 57 – К выводу формулы за высоту

Поправка ΔS_H называется поправкой за приведение расстояний к уровню моря или поправкой за высоту над эллипсоидом; она всегда отрицательна. Относительное искажение $\frac{\Delta S_H}{S}$ для разных типов рельефа приведено в таблице 14.

Таблица 14

Тип рельефа	Высота H	$\Delta S_H / S$
Равнинный	100 м	1 / 64 000
	200 м	1 / 32 000
Всхолмленный	500 м	1 / 12800
Предгорный	1 000	1 / 6 400
Горный	2 000	1 / 3 200
	3 000	1 / 2100

Поправка за переход к плоскости проекции Гаусса. Эта поправка вычисляется по формуле $\Delta S_Y = S \cdot \frac{Y^2}{2R^2}$, где Y - расстояние линии от осевого меридиана зоны; она всегда положительна.

Длина линии на плоскости проекции Гаусса, таким образом, получается из измеренного расстояния, исправленного за наклон линии к горизонту, за центрировку светодальномера и редукцию отражателя, за высоту линии над эллипсоидом и за переход к плоскости проекции Гаусса.

Вычисление рабочих координат пунктов полигонометрических ходов и сетей

Вычисление приближённых или “рабочих координат” производится по той же методике, по которой обрабатываются измерения в теодолитных ходах, то есть, методом последовательного распределения невязок [3]. Сначала вычисляется угловая невязка и оценивается качество угловых измерений; затем вычисляются координатные невязки, а также абсолютная и относительная невязки и оценивается качество линейных измерений. Необходимость в получении рабочих координат возникает тогда, когда съёмочные работы производятся сразу же после создания съёмочного обоснования, то есть, до камерального строгого уравнивания полигонометрических ходов и систем ходов. Так, для съёмок в масштабе 1:5000 достаточно знать координаты пунктов с ошибкой 0,5 м; для съёмки в масштабе 1:2000 – 0,2 м. Такие требования можно обеспечить и при предварительных вычислениях полигонометрии и теодолитных ходов.

Оценка точности результатов угловых и линейных измерений

Перед уравниванием всей системы полигонометрических ходов на объекте необходимо оценить реальную точность измерений углов и сторон в ходах. Правильно подсчитанные СКО измерения углов и сторон m_β, m_S позволяют правильно назначить веса угловых и линейных измерений и, следовательно, обеспечить оптимальные условия для уравнивания отдельных ходов и систем ходов.

Оценка точности измерения углов может выполняться:

- по уклонениям от среднего в приёмах;
- по разностям двойных измерений;
- по значениям угловых невязок в отдельных полигонометрических ходах.

Соответственно есть и три разных набора формул для вычисления СКО измерения углов m_β .

Для одного приёма измерения угла $m_\beta = \sqrt{\frac{[v_\beta^2]_k}{k-1}}$, где k - количество приёмов, v_β - уклонение угла в каждом приёме от среднего из всех приёмов. На пункте число приёмов бывает от 2 до 6, поэтому надёжность такого подсчёта m_β невелика, тем более, что на разных пунктах значение m_β может получиться разным. При использовании результатов измерений на n пунктах хода СКО измерения угла одним приёмом вычисляют по формуле

$$m_\beta = \sqrt{\frac{[v_\beta^2]_{k,n}}{n \cdot (k-1)}},$$

а СКО среднего значения угла из k приёмов – по формуле

$$M_\beta = \frac{m_\beta}{\sqrt{k}}.$$

Набор формул для оценки точности измерения углов по разностям двойных измерений мы приводить не будем.

СКО измерений углов по значениям невязок в отдельных ходах (полигонах) вычисляется по формуле

$$M_\beta = \sqrt{\frac{\left[\frac{f_\beta^2}{n+1} \right]_N}{N}};$$

здесь: f_β - угловая невязка в ходе, n - количество сторон в ходе, N - количество ходов (полигонов).

Уравнивание полигонометрического хода коррелятным способом МНК

В полигонометрическом ходе, как и в любом построении, выделяют три типа данных: исходные данные (это – координаты первого и последнего пунктов хода и дирекционные углы примычных направлений в начале и в конце хода); измеренные данные (это – горизонтальные углы, их количество равно $n+1$, и длины сторон хода, их количество равно n); определяемые данные (это – координаты определяемых пунктов, их количество равно $t = 2 \cdot (n-1)$).

Метод наименьших квадратов имеет две модификации: параметрический и коррелятный способы уравнивания. В первом из них количество нормальных уравнений равно количеству определяемых неизвестных, во втором – количеству избыточных измерений; при ручном счёте тот или иной способ выбирали в зависимости от соотношения этих чисел; уравнивание полигонометрического хода, как правило, выполнялось коррелятным способом. При машинной обработке на персональном компьютере количество нормальных уравнений большого значения не имеет, и на первый план выступает простота алгоритма того или иного способа. По этому показателю параметрический способ уравнивания оказался предпочтительнее коррелятного, и в настоящее время большинство программ уравнивания геодезических построений составлены в соответствии с алгоритмом параметрического уравнивания. Коррелятный способ мы рассматриваем в историческом и теоретическом аспектах проблемы уравнивания.

Как отмечалось в главе 2, в матричной записи теория коррелятного способа МНК-уравнивания имеет следующий вид. Система уравнений поправок записывается в виде матричного уравнения

$$A_{rn} \cdot V_{n1} + W_{r1} = 0;$$

здесь A_{rn} - матрица коэффициентов уравнений поправок размером rn (r строк и n столбцов); V_{n1} - вектор поправок размером $n1$ (n строк, 1 столбец); W_{r1} - вектор невязок

размером $r1$ (r строк, 1 столбец); n - количество измерений, t - количество определяемых неизвестных, r - количество избыточных измерений, равное количеству условий $r = n - t$.

Условие минимума суммы квадратов поправок записывается так $V_{n1}^T \cdot P_{nn} \cdot V_{n1} = \min$.

Система нормальных уравнений коррелат имеет вид

$$N_{rr} \cdot K_{r1} + W_{r1} = 0,$$

где N_{rr} - матрица коэффициентов нормальных уравнений коррелат, $N_{rr} = A_{rn} \cdot \Pi_{nn} \cdot A_{rn}^T$;

Π_{nn} - матрица обратных весов измеренных элементов, $\pi_i = \frac{1}{p_i}$; K_{r1} - вектор коррелат

размером $r1$. Поправки в измерения выражаются через коррелаты по формуле

$$V_{n1} = \Pi_{nn} \cdot A_{rn}^T \cdot K_{r1}.$$

В отдельном полигонометрическом ходе три избыточных измерения и три условных уравнения связи.

Первое уравнение – условное уравнение дирекционных углов

$$[v_\beta] + f_\beta = 0,$$

где f_β - угловая невязка хода; для левых углов $f_\beta = \sum \beta_{изм} - (\alpha_{кон} - \alpha_{нач} + 180^\circ \cdot (n+1))$;

n - количество сторон в ходе; v_β - поправки в измеренные значения углов.

Ещё два уравнения – это условные уравнения координат (X и Y):

$$[v_{\Delta X}] + f_X = 0; \quad [v_{\Delta Y}] + f_Y = 0.$$

Здесь f_X и f_Y - координатные невязки; $f_X = \sum \Delta X_{выч} - (X_{кон} - X_{нач})$,

$$f_Y = \sum \Delta Y_{выч} - (Y_{кон} - Y_{нач}).$$

Поправки $v_{\Delta X}$ и $v_{\Delta Y}$ - это поправки к вычисленным значениям приращений координат, которые являются зависимыми величинами; по теории МНК в уравнениях должны стоять поправки к измеренным элементам β и S . Преобразование условных уравнений координат выполняется с помощью дифференциальных формул приращений координат

$$v_{\Delta X_i} = \cos \alpha_i \cdot v_{S_i} - \Delta Y \cdot \frac{v_{\alpha_i}}{\rho}; \quad v_{\Delta Y_i} = \sin \alpha_i \cdot v_{S_i} + \Delta X \cdot \frac{v_{\alpha_i}}{\rho}.$$

В этих формулах через ΔX и ΔY обозначены приращения координат по сторонам хода; v_α и v_S - поправки в дирекционные углы и длины сторон хода. Если выразить S в километрах, поправки в углы – в секундах, поправки в длины сторон – в сантиметрах, то значение $\rho = 2,06265$.

Условные уравнения координат запишутся в виде

$$[\cos \alpha \cdot v_S] - \frac{1}{\rho} \cdot [\Delta Y \cdot v_\alpha] + f_X = 0,$$

$$[\sin \alpha \cdot v_S] + \frac{1}{\rho} \cdot [\Delta X \cdot v_\alpha] + f_Y = 0.$$

Эти уравнения ещё не являются окончательными, так как поправки в дирекционные углы нужно выразить через поправки в измеренные углы. Выразив каждый дирекционный угол через измеренные углы, получим

$$[\cos \alpha \cdot v_S] - \frac{1}{\rho} \cdot [(Y_{n+1} - Y) \cdot v_\beta] + f_X = 0,$$

$$[\sin \alpha \cdot v_S] + \frac{1}{\rho} \cdot [(X_{n+1} - X) \cdot v_\beta] + f_Y = 0.$$

Таким образом, все условные уравнения получены.

Нормальные уравнения коррелат имеют вид

$$[qaa] \cdot k_1 + [qab] \cdot k_2 + [qac] \cdot k_3 + f_\beta = 0,$$

$$[qab] \cdot k_1 + [qbb] \cdot k_2 + [qbc] \cdot k_3 + f_X = 0,$$

$$[qac] \cdot k_1 + [qbc] \cdot k_2 + [qcc] \cdot k_3 + f_Y = 0.$$

В этих уравнениях через q обозначен обратный вес измеренных величин $q = \frac{1}{p}$.

Приведём полную запись нормальных уравнений коррелат:

$$\begin{aligned}
 q_{\beta} \cdot (n-1) \cdot k_1 - \frac{q_{\beta}}{\rho} \cdot [(Y_{n+1} - Y)] \cdot k_2 + \frac{q_{\beta}}{\beta \rho} \cdot [(X_{n+1} - X)] \cdot k_3 + f_{\beta} &= 0, \\
 -\frac{q_{\beta}}{\rho} \cdot [(Y_{n+1} - Y)] \cdot k_1 + \left\{ \frac{q_{\beta}}{\rho^2} [(Y_{n+1} - Y)^2] + [q_s \cdot \cos^2 \alpha] \right\} \cdot k_2 - \\
 -\left\{ \frac{q_{\beta}}{\rho^2} \cdot [(Y_{n+1} - Y) \cdot (X_{n+1} - X)] + [q_s \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha] \right\} \cdot k_3 + f_X &= 0 \\
 \frac{q_{\beta}}{\rho} \cdot [(X_{n+1} - X)] \cdot k_1 + \left\{ \frac{q_{\beta}}{\rho^2} [(Y_{n+1} - Y) \cdot (X_{n+1} - X)] + [q_s \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha] \right\} \cdot k_2 + \\
 + \left\{ \frac{q_{\beta}}{\rho^2} \cdot [(X_{n+1} - X)^2] + [q_s \cdot \sin^2 \alpha] \right\} \cdot k_3 + f_Y &= 0
 \end{aligned}$$

Из решения нормальных уравнений коррелат находят значения трёх коррелат k_1, k_2, k_3 .

Поправки в измеренные значения углов и сторон хода вычисляют по формулам

$$\begin{aligned}
 v_{\beta_i} &= q_{\beta} \cdot \left\{ k_1 - \frac{1}{\rho} \cdot (Y_{n+1} - Y_i) \cdot k_2 + \frac{1}{\rho} \cdot (X_{n+1} - X_i) \cdot k_3 \right\}, \\
 v_{s_i} &= q_{s_i} \cdot \{ \cos \alpha_i \cdot k_2 + \sin \alpha_i \cdot k_3 \}.
 \end{aligned}$$

Поправки в дирекционные углы получают по поправкам v_{β_i} .

Уравненные углы, дирекционные углы и длины сторон находят путём введения поправок $v_{\beta_i}, v_{\alpha_i}, v_{s_i}$. Уравненные значения приращений координат находят по уравненным длинам и дирекционным углам сторон хода. Заключительным контролем вычислений являются равенства

$$[\Delta X_{yp}] = X_{кон} - X_{нач}, \quad [\Delta Y_{yp}] = Y_{кон} - Y_{нач}.$$

Уравнивание полигонометрии параметрическим способом МНК

Как отмечалось в главе 2, в матричной записи параметрический способ МНК-уравнивания имеет вид

- параметрические уравнения поправок $A_{nt} \cdot \Delta X_{t1} + L_{n1} = V_{n1}$;
- нормальные уравнения параметров-поправок $N_{tt} \cdot \Delta X_{t1} + B_{t1} = 0_{t1}$;
- матрица коэффициентов нормальных уравнений $N_{tt} = A_{nt}^T \cdot P_{nn} \cdot A_{nt}$;
- вектор свободных членов нормальных уравнений $B_{t1} = A_{nt}^T \cdot P_{nn} \cdot L_{n1}$;
- вектор поправок к приближённым значениям неизвестных $\Delta X_{t1} = -N_{tt}^{-1} \cdot B_{t1}$.

В этих формулах:

n - количество измерений ;

t - количество определяемых неизвестных;

L_{n1} - вектор свободных членов параметрических уравнений поправок,

$$l_i = f_i(X_1^0, X_2^0, \dots, X_t^0) - L_i;$$

P_{nn} - диагональная матрица весов измерений;

A_{nt} - матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок размером n строк и t столбцов.

V_{n1} - вектор поправок в результаты измерений.

При формировании матрицы P весов измерений поступают следующим образом. За ошибку единицы веса μ_0 принимают СКО измерения угла m_β , и поэтому веса углов получаются равными единице

$$p_\beta = \frac{\mu_0^2}{m_\beta^2} = 1.$$

Для вычисления весов измеренных сторон хода необходимо ввести коэффициент k , равный отношению весов сторон и углов; на практике значение этого коэффициента принимают равным 1, 2, 3, 4 и т.д.

$$k = \frac{p_\beta}{p_s} = \frac{m_s^2}{m_\beta^2}; \quad p_s = \frac{p_\beta}{k};$$

$$m_s = m_\beta \cdot \sqrt{k}.$$

При коротких сторонах хода значение коэффициента k берётся равным 1 или 2; при длинных сторонах – 2, 3 или 4.

При вычислении весов и СКО измеренных сторон следует учитывать размерности углов и сторон; принято вычислять ошибки углов в секундах дуги, а ошибки измеренных сторон – в сантиметрах.

Элементами матрицы A коэффициентов параметрических уравнений поправок являются частные производные каждого измерения по координатам всех определяемых пунктов хода; их значения вычисляются по дифференциальным формулам горизонтального угла и длины линии.

Приведём вывод дифференциальных формул дирекционного угла, угла поворота и расстояния. На рис.58 показан дирекционный угол α_{12} направления 1-2; из решения обратной геодезической задачи между пунктами 1 и 2 имеется формула дирекционного угла

$$\alpha_{12} = \arctg \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1},$$

из которой нетрудно получить частные производные дирекционного угла по координатам пунктов 1 и 2.

Частное дифференцирование α_{12} по координате X_1 даёт

$$\frac{\partial \alpha_{12}}{\partial X_1} = \frac{1}{1 + \left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \right)^2} \cdot \frac{Y_2 - Y_1}{(X_2 - X_1)^2} = \frac{Y_2 - Y_1}{S^2} = \frac{\rho}{S} \cdot \sin \alpha_{12}.$$

Аналогичные преобразование частных производных α_{12} по Y_1, X_2, Y_2 приводят к следующим формулам

$$\frac{\partial \alpha_{12}}{\partial Y_1} = -\frac{\rho}{S} \cdot \cos \alpha_{12}, \quad \frac{\partial \alpha_{12}}{\partial X_2} = -\frac{\rho}{S} \cdot \sin \alpha_{12}, \quad \frac{\partial \alpha_{12}}{\partial Y_2} = \frac{\rho}{S} \cdot \cos \alpha_{12}.$$

Горизонтальный угол можно выразить как разность дирекционных углов направлений второй и первой сторон угла. Обозначив направление второй стороны угла через 1-3, получим дифференциальную формулу левого горизонтального угла (рис.58-а)

$$\Delta \beta = \rho \cdot \left(\frac{\sin \alpha_2}{S_2} - \frac{\sin \alpha_1}{S_1} \right) \cdot \Delta X_1 + \rho \cdot \left(-\frac{\cos \alpha_2}{S_2} + \frac{\cos \alpha_1}{S_1} \right) \cdot \Delta Y_1 +$$

$$+ \rho \cdot \frac{\sin \alpha_1}{S_1} \cdot \Delta X_2 - \rho \cdot \frac{\cos \alpha_1}{S_1} \cdot \Delta Y_2 - \rho \cdot \frac{\sin \alpha_2}{S_2} \cdot \Delta X_3 + \rho \cdot \frac{\cos \alpha_2}{S_2} \cdot \Delta Y_3.$$

В этой формуле приняты обозначения:

1, 2, 3 – номера пунктов; S_1, α_1 – длина и дирекционный угол первой стороны угла – линии 1-2; S_2, α_2 – длина и дирекционный угол второй стороны угла – линии 1-3; символом Δ обозначен дифференциал (малое приращение) угла β и координат пунктов.

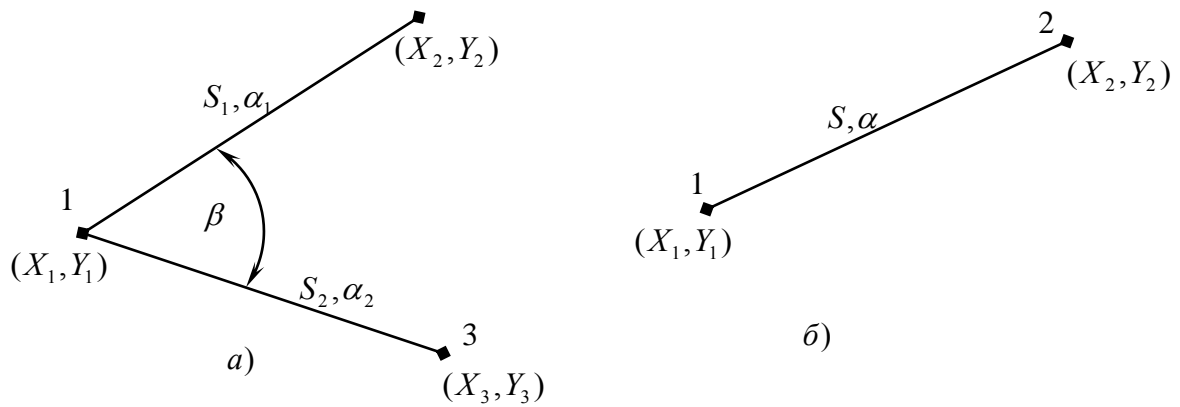


Рисунок 58 – К выводу дифференциальных формул угла и длины стороны

Дифференциальная формула длины линии имеет вид (рис.58-б)

$$\Delta S = -\cos \alpha \cdot \Delta X_1 - \sin \alpha \cdot \Delta Y_1 + \cos \alpha \cdot \Delta X_2 + \sin \alpha \cdot \Delta Y_2.$$

В этой формуле приняты обозначения:

1, 2 – номера пунктов; α – дирекционный угол линии 1-2; символом Δ обозначен дифференциал (малое приращение) длины линии и координат пунктов. Формула (17) получается путём дифференцирования формулы

$$S = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} = [(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2]^{1/2}.$$

Дифференцируем по X_1

$$\frac{\partial S}{\partial X_1} = \frac{1}{2} \cdot [(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2]^{-1/2} \cdot 2 \cdot (X_2 - X_1) \cdot (-1).$$

$$\frac{\partial S}{\partial X_1} = -\frac{X_2 - X_1}{S} = -\cos \alpha_{12}.$$

Аналогичные преобразования с частными производными по Y_1, X_2, Y_2 дают

$$\frac{\partial S}{\partial Y_1} = -\sin \alpha_{12}, \quad \frac{\partial S}{\partial X_2} = \cos \alpha_{12}, \quad \frac{\partial S}{\partial Y_2} = \sin \alpha_{12}.$$

При вычислении по приведённым дифференциальным формулам следует соблюдать размерности: длины линий S_1, S_2 – в километрах; $\rho = 2,06$; все дифференциалы, кроме дифференциала угла, – в сантиметрах; дифференциал угла – в секундах. Числовые значения элементов нужно писать, как минимум, с тремя значащими цифрами.

Приближённые (рабочие) значения координат определяемых пунктов получают из предварительной обработки хода. Уравненные координаты пунктов вычисляют по формулам

$$X_{yp} = X_{выч} + \Delta X, \quad Y_{yp} = Y_{выч} + \Delta Y.$$

Оценку точности положения пунктов хода выполняют в два действия: сначала вычисляют СКО единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{p \cdot v^2}{n - t}},$$

и затем – ошибку положения каждого пункта хода по формуле

$$M_p = \mu \cdot \sqrt{Q_X + Q_Y},$$

где Q_X и Q_Y – диагональные элементы корреляционной матрицы N_u^{-1} , соответствующие координатам X и Y пункта.

Последовательность операций в параметрическом способе МНК-уравнивания полигонометрического хода: 1) – вычисление приближённых координат определяемых пунктов X_i^0, Y_i^0 ; как правило, эта операция выполняется с использованием результатов измерений; 2) – вычисление дирекционных углов и длин линий, соответствующих

приближённым координатам пунктов; 3) – вычисление свободных членов параметрических уравнений поправок; 4 – составление матрицы A ; 5) – принятие ошибки единицы веса и составление весовой матрицы P ; 6) - выполнение операций с матрицами, получение корреляционной матрицы $Q = N_u^{-1}$; 7) – вычисление уравненных координат определяемых пунктов; 8) - вычисление поправок в измеренные элементы; 9) - вычисление квадратичной формы и СКО единицы веса; 10) – оценка точности всех параметров полигонометрического хода.

Приведём пример составления матрицы A . На схеме полигонометрического хода (рис.59) покажем измеренные углы и стороны.

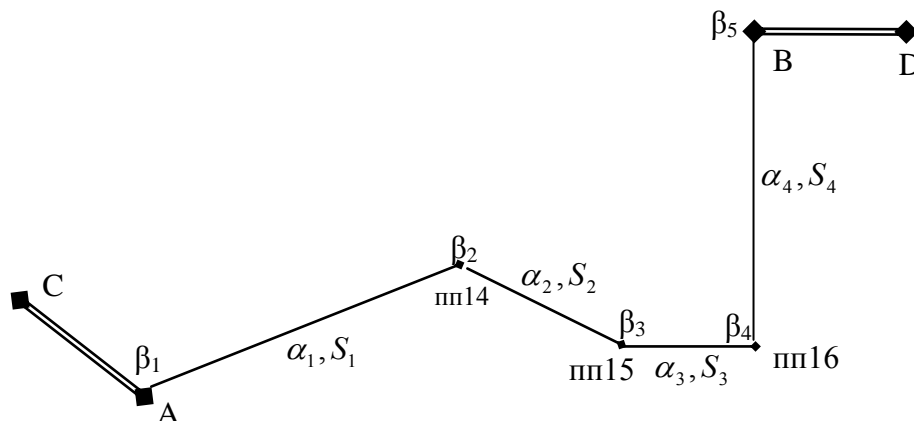


Рисунок 59 – К составлению матрицы A

Сначала заполним вспомогательную таблицу 15; длина S – в км, $\rho = 2,06265$.

Таблица 15

№ пунктов	Назв. пунктов	Координаты		α град. мин.	S км	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\rho \cdot \frac{\sin \alpha}{S}$	$\rho \cdot \frac{\cos \alpha}{S}$
		X, м	Y, м						
1	A					+			
2	пп14			60 00	1,000	0,8660	+0,5000	+1,786	+1,031
3	пп15			120 00	0,500	+0,8660	-0,5000	+3,573	-2,063
4	пп16			90 00	0,400	+1,0000	0,0000	+5,157	0,000
5	B			0 00	1,000	0,0000	+1,0000	0,000	+2,063

Затем, используя дифференциальные формулы угла с учётом таблицы 15, заполняем первые пять строк таблицы 16. Затем заполняем оставшиеся четыре строки, используя дифференциальную формулу длины стороны с учётом таблицы 15.

Таблица 16

№ измере- ния	Название измерения	ΔX_1 (ΔX_{nn14})	ΔX_2 (ΔY_{nn14})	ΔX_3 (ΔX_{nn15})	ΔX_4 (ΔY_{nn15})	ΔX_5 (ΔX_{nn16})	ΔX_1 (ΔY_{nn16})
1	β_1	-1,786	+1,031	0	0	0	0
2	β_2	+1,787	+3,093	-3,573	-2,063	0	0
3	β_3	+3,573	+2,063	+1,584	-2,063	-5,157	0
4	β_4	0	0	+5,157	0	-5,157	-2,063
5	β_5	0	0	0	0	0	-2,063
6	S_1	+0,500	+0,866	0	0	0	0
7	S_2	+0,500	-0,866	-0,500	+0,866	0	0
8	S_3	0	0	0	-1,000	0	+1,000
9	S_4	0	0	0	0	-1,000	0

ПРИВЯЗКА ПОЛИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ХОДОВ

Снесение координат с вершины знака на землю

Привязка линейно-углового хода означает привязку хода к конкретной системе прямоугольных координат. На местности система прямоугольных координат задаётся известными координатами не менее, чем двух фиксированных точек (обычно это – координаты пунктов более высокого класса точности, являющиеся исходными данными). Самым простым способом привязки хода является включение в него исходных пунктов с известными координатами и измерение на конечных пунктах хода примычных углов, то есть углов между направлением с известным дирекционным углом и первой (последней) стороной хода.

При частичной координатной примычного угла нет либо в начале хода, либо в конце хода; в этом случае вычисление дирекционных углов сторон хода начинают с того конца хода, где измерен примычный угол. Дальнейшие действия по вычислению координат выполняют как в стандартном разомкнутом ходе.

При полной координатной привязке, когда примычных углов нет ни в начале, ни в конце хода, определение дирекционного угла первой стороны хода выполняют следующим образом:

- принимают промежуточное значение дирекционного угла первой стороны хода равным нулю $\alpha'_1 = 0$;
- вычисляют промежуточные дирекционные углы остальных сторон хода;
- от начала хода к его концу последовательно решают прямую геодезическую задачу и получают промежуточные координаты конечного пункта хода;
- решают обратную геодезическую задачу между начальным и конечным пунктами хода по их известным координатам, получают длину замыкающей S и дирекционный угол замыкающей α ;
- решают обратную геодезическую задачу между начальным пунктом хода и промежуточным конечным пунктом хода, получают длину промежуточной замыкающей S' и дирекционный угол промежуточной замыкающей α' ;
- выполняют контроль $S' = S$;
- вычисляют действительный дирекционный угол первой стороны хода $\alpha_1 = \alpha - \alpha'$.

Дальнейшая обработка хода заключается в вычислении действительных дирекционных углов сторон хода, получение двух координатных невязок и их распределение в приращения координат пропорционально длинам сторон.

В практике встречаются случаи, когда на начальном или конечном пункте хода нельзя установить приборы для угловых и линейных измерений; в этих случаях применяют вариант “снесение координат с вершины знака на землю”.

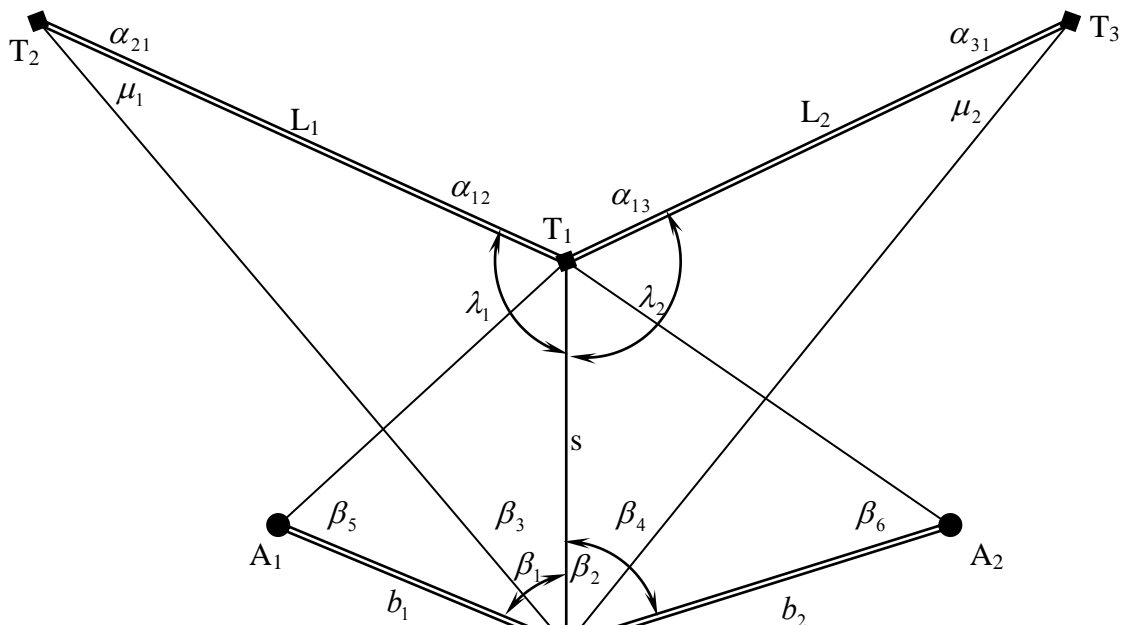


Рисунок 60 – Снесение координат с вершины знака на землю

На рис.60 точка P - определяемый пункт, T_1, T_2, T_3 - пункты с известными координатами, которые можно использовать лишь в качестве визирных целей. С пункта P можно измерить только два угла по программе обратной угловой засечки, что недостаточно; кроме того, при малом расстоянии между пунктами P и T_1 , угол засечки очень маленький и точность засечки получается недостаточной. Закладывают два временных пункта A_1 и A_2 и измеряют расстояния b_1 и b_2 и углы $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$. Таким образом, общее число измерений равно восемь, а количество неизвестных - шесть (координаты трех пунктов). Обработку этого геодезического построения необходимо выполнять уравниванием по МНК; приближенное решение можно получить по конечным формулам, приведенным ниже.

- Вычисление расстояния s ($s = T_1P$) два раза: из треугольника PA_1T_1 и треугольника PA_2T_2 и затем – среднего из двух

$$s = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{b_1 \cdot \sin \beta_5}{\sin(\beta_1 + \beta_5)} + \frac{b_2 \cdot \sin \beta_6}{\sin(\beta_2 + \beta_6)} \right];$$

- Решение обратной геодезической задачи между пунктами T_1 и T_2 (вычисление α_{12} и L_1) и между пунктами T_1 и T_3 (вычисление α_{13} и L_2);

- Вычисление углов μ_1 и μ_2 из треугольников PT_2T_1 и PT_3T_1

$$\sin \mu_1 = \frac{S}{L_1} \cdot \sin \beta_3, \quad \sin \mu_2 = \frac{S}{L_2} \cdot \sin \beta_4;$$

- Вычисление углов λ_1 и λ_2 из треугольников PT_2T_1 и PT_3T_1

$$\lambda_1 = 180^\circ - (\mu_1 + \beta_3), \quad \lambda_2 = 180^\circ - (\mu_2 + \beta_4).$$

- Вычисление дирекционного угла α линии T_1P

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot [(\alpha_{12} - \lambda_1) + (\alpha_{13} - \lambda_2)];$$

- Решение прямой геодезической задачи из пункта T на пункт P

$$X_P = X_1 + s \cdot \cos \alpha, \quad Y_P = Y_1 + s \cdot \sin \alpha.$$

Привязка линейно-углового хода к стенным маркам

В населённых пунктах многие геодезические пункты оформляются в виде стенных марок, и в этих условиях привязку линейно-углового хода можно выполнять к стенным маркам.

Стенные марки закладываются в цокольный этаж или в стену капитального здания. Закладка стенных марок и определение их координат выполняется при создании геодезических сетей на территории населенных пунктов и промышленных предприятий; в дальнейшем эти марки играют роль опорных пунктов в последующих геодезических построениях.

Привязка линейно-углового хода может быть выполнена к двум, трем или более стенным маркам. Схема привязки хода к двум маркам A и B показана на рис.61.

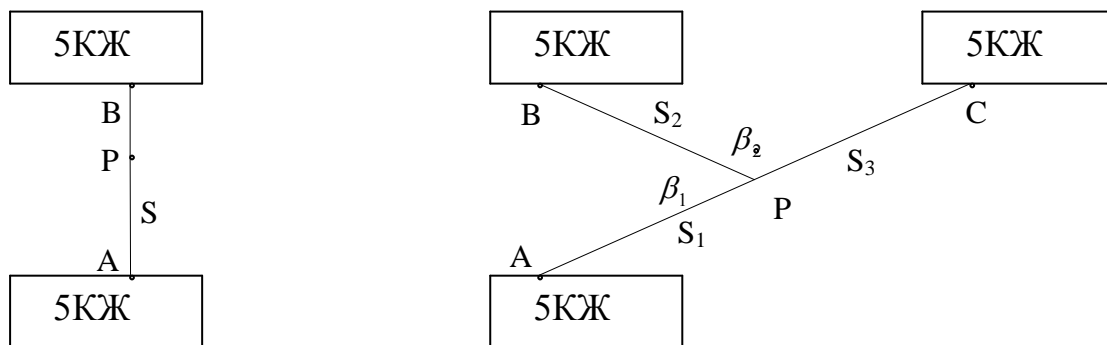


Рисунок 61 – Привязка линейно-углового хода к стенным маркам

На линии AB с помощью рулетки измеряется отрезок S , и координаты точки P находятся из решения прямой геодезической задачи по формулам

$$X_P = X_1 + S \cdot \cos \alpha, \quad Y_P = Y_1 + S \cdot \sin \alpha.$$

где α - дирекционный угол направления AB .

Схема привязки к трем маркам A, B, C показана на рис.60.

С помощью рулетки измеряются расстояния S_1, S_2, S_3 и решается многократная линейная засечка; для большей надежности можно измерить углы β_1 и β_2 решить комбинированную засечку. В качестве примычного направления с известным дирекционным углом можно использовать либо направление на одну из стенных марок, либо направление на какой-нибудь другой пункт с известными координатами.

Кроме метода засечек при привязке ходов к стенным маркам применяют также полярный метод и метод редуцирования. В [11] на стр. 195 - 201 приведено подробное описание этих методов, а также даны числовые примеры.

Проектирование полигонометрических ходов и систем ходов с узловыми точками

До начала топографо-геодезических работ на объект разрабатывается технический проект или программа производства этих работ.

Программа производства топографо-геодезических работ составляется при выполнении несложного комплекса этих работ, не требующих разработки специальных методов их производства и расчёта точности геодезической основы, создаваемой по типовым схемам.

Технический проект составляется при выполнении разнообразного и сложного комплекса топографо-геодезических работ, требующих предварительной разработки специальных методов их выполнения и расчёта точности создаваемых опорных геодезических работ, а также при инженерных изысканиях для строительства крупных и сложных предприятий и сооружений.

Полигонометрические ходы и системы ходов, как правило, являются составной частью комплекса топографо-геодезических работ, и их проектирование выполняется в общем проекте; рассмотрим некоторые теоретические вопросы проектирования полигонометрии, как метода создания плановых геодезических сетей.

На стадии проектирования выполняют предрасчёт точности хода, то есть по заданным значениям ошибок измерения углов и расстояний подсчитывают ошибку положения пункта в наиболее слабом месте хода (в его середине) и ожидаемое значение относительной невязки хода.

Выполним вывод формулы ошибки положения конечной точки прямолинейного линейно-углового хода для случая неисправленных за угловую невязку углов. Ошибка положения конечной точки может быть разложена на две ошибки – продольную t и поперечную u

$$M^2 = t^2 + u^2.$$

Продольная ошибка для прямолинейного хода является следствием ошибок измерения сторон хода

$$t^2 = m_{s_1}^2 + m_{s_2}^2 + \dots + m_{s_n}^2 = [m_s^2],$$

а поперечная ошибка – следствием ошибок измерения углов

$$u^2 = (S_1 + S_2 + \dots + S_n)^2 \cdot \frac{m_\beta^2}{\rho^2} + (S_2 + S_3 + \dots + S_n)^2 \cdot \frac{m_\beta^2}{\rho^2} + \dots + S_n^2 \cdot \frac{m_\beta^2}{\rho^2}.$$

После несложных преобразований формула для u^2 приобретает вид

$$u^2 = L^2 \cdot \frac{n+1.5}{3} \cdot \frac{m_\beta^2}{\rho^2},$$

где $L = S \cdot n$ - длина хода.

Формула для вычисления полной ошибки положения конечной точки хода имеет вид

$$M^2 = [m_s^2] + L^2 \cdot \frac{n+1.5}{3} \cdot \frac{m_\beta^2}{\rho^2}.$$

Для случая исправленных за угловую невязку углов формула ошибки положения конечной точки прямолинейного хода записывается в виде

$$M^2 = [m_s^2] + L^2 \cdot \frac{n+3}{12} \cdot \frac{m_\beta^2}{\rho^2}.$$

В линейно-угловом ходе произвольной формы ошибку положения конечной точки хода для случая исправленных за угловую невязку углов подсчитывают по формуле

$$M^2 = [m_s^2] + \frac{m_\beta^2}{\rho^2} \cdot [D_{0,i}^2],$$

где $D_{0,i}$ – расстояние каждого пункта хода до центра тяжести хода.

Центр тяжести хода на схеме хода строится следующим образом. На первой стороне хода, соединяющей пункты 1 и 2, находится точка её середины (O_1), и этой точке приписывается вес 2. Затем проводится линия, соединяющая точку O_1 с пунктом 3, и на этой линии находится центр тяжести, считая вес пункта 3 равным единице, - получается точка O_2 , которой приписывается вес равный 3. Затем проводится линия, соединяющая точку O_2 с пунктом 4, и на этой линии находится центр тяжести, считая вес пункта 4 равным единице, - получается точка O_3 , которой приписывается вес равный 4. Эта операция повторяется до последнего пункта хода; последняя найденная точка с весом n (n – количество пунктов в ходе) и является центром тяжести хода. Расстояния от каждого пункта до центра тяжести измеряются по линейному масштабу карты с помощью циркуля-измерителя.

Чисто прямолинейный ход на практике встречается довольно редко, более часто встречаются так называемые вытянутые ходы, для которых можно применять формулы оценки точности прямолинейного хода. Ход считается вытянутым, если в нём выполняются следующие два условия:

- пункты хода уклоняются от линии, проходящей через центр тяжести хода и параллельной замыкающей хода, в среднем на 1/24 длины замыкающей (в пределе до 1/8 длины замыкающей);
- угол между отдельными линиями хода и замыкающей хода в среднем не превышает 8^0 (в пределе 24^0).

Иногда используют ещё один критерий вытянутости хода – если отношение длины хода (суммы всех его сторон) к длине замыкающей не превышает 1,3.

Формулы предрасчёта ошибки положения конечной точки хода используются для расчёта ошибки положения пункта после уравнивания в середине хода (как в наиболее слабом месте). Доказано, что предельная ошибка положения пункта в середине хода после уравнивания равна средней квадратической ошибке конечного пункта хода до уравнивания, и при $\Delta_{пред} = 2 \cdot M$ можно написать

$$M_{сеп} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{[m_s^2] + \frac{m_\beta^2}{\rho^2} \cdot [D_{0,i}^2]}.$$

На стадии проектирования хода проверяется условие

$$M_{\text{сеп}} \leq M_0,$$

где M_0 – проектный допуск на ошибку положения пунктов геодезического построения.

Для предрасчёта ошибки положения пункта в середине хода произвольной формы можно применить и формулы, выведенные проф. Конусовым В.Г.

$$t^2 = \frac{a \cdot c}{a \cdot \sin^2 \varphi + c \cdot \cos^2 \varphi},$$

$$u^2 = \frac{a \cdot b}{a \cdot \cos^2 \varphi + b \cdot \sin^2 \varphi},$$

$$a = \frac{[m_s^2]}{4},$$

$$b = [S]^2 \cdot \frac{(n+2) \cdot (n^2 + 2n + 4)}{192 \cdot n \cdot (n+1)} \cdot \frac{m_\beta^2}{\rho^2},$$

$$c = [S]^2 \cdot \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{48 \cdot n} \cdot \frac{m_\beta^2}{\rho^2},$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot (\varphi_A + \varphi_B).$$

$$M_{\text{сеп}}^2 = t^2 + u^2,$$

Углы φ_A и φ_B – это углы в начале и в конце хода между замыкающей хода и полузамыкающими хода (линиями, проведёнными от начального пункта до срединного пункта и от срединного пункта до конечного пункта хода).

При сравнении результатов предрасчёта ошибки положения срединного пункта хода, полученной по разным формулам, оказалось, что эти ошибки различаются не более, чем на 10% - 20%.

Существует также строгий способ предрасчёта точности, основанный на вычислении корреляционной матрицы хода и выбора наиболее слабого пункта в нём по значениям диагональных элементов этой матрицы.

Строгий способ. Из теории параметрического способа МНК-уравнивания известно, что СКО любого параметра геодезической сети можно вычислить по формуле

$$M_F = \mu \cdot \sqrt{Q_F};$$

здесь: F - условное обозначение параметра, μ - СКО единицы веса (при проектировании сети используют проектное значение ошибки единицы веса μ_0), Q_F - обратный вес параметра. Для вычисляемых неизвестных обратные веса равны диагональным элементам корреляционной матрицы Q , получаемой обращением матрицы коэффициентов нормальных уравнений

$$Q = (A^T \cdot P \cdot A)^{-1};$$

здесь: A - матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок, P - диагональная матрица весов измерений.

При проектировании полигонометрии основным параметром сети является средняя квадратическая ошибка положения пункта M_P

$$M_P = \mu \cdot \sqrt{m_X^2 + m_Y^2}.$$

Поскольку $m_X = \mu \cdot \sqrt{Q_X}$ и $m_Y = \mu \cdot \sqrt{Q_Y}$, а $\mu = \mu_0$, то

$$M_P = \mu_0 \cdot \sqrt{Q_X + Q_Y}.$$

В полигонометрии неизвестными являются координаты X и Y определяемых пунктов; обратные веса Q_X и Q_Y координат берутся из матрицы Q , проектное значение СКО положения пункта в наиболее слабом месте известно, и из формулы

$$M_{\text{сеп}} = \mu_0 \cdot \sqrt{Q_X + Q_Y}$$

можно получить значение μ_0

$$\mu_0 = m_\beta = \frac{M_{сер}}{\sqrt{Q_X + Q_Y}}. \quad (3.7)$$

Понятно, что сумма обратных весов для наиболее слабого пункта хода имеет наибольшее значение; выбрать максимум этой суммы по диагональным элементам матрицы Q нетрудно.

При формировании матрицы P весов измерений поступают следующим образом. За ошибку единицы веса μ_0 принимают СКО измерения угла m_β , и поэтому веса углов получаются равными единице

$$p_\beta = \frac{\mu_0^2}{m_\beta^2} = 1.$$

Для вычисления весов измеренных сторон хода необходимо ввести коэффициент k , равный отношению весов сторон и углов; на практике значение этого коэффициента принимают равным 1, 2, 3, 4 и т.д.

$$k = \frac{p_\beta}{p_s} = \frac{m_s^2}{m_\beta^2}; \quad p_s = \frac{p_\beta}{k};$$

$$m_s = m_\beta \cdot \sqrt{k}. \quad (3.8)$$

При коротких сторонах хода значение коэффициента k берётся равным 1 или 2; при длинных сторонах – 2, 3 или 4.

При вычислении весов и СКО измеренных сторон следует учитывать размерности углов и сторон; принято вычислять ошибки углов в секундах дуги, а ошибки измеренных сторон – в сантиметрах.

Элементами матрицы коэффициентов параметрических уравнений поправок являются частные производные каждого измерения по координатам всех определяемых пунктов хода; их значения вычисляются по дифференциальным формулам горизонтального угла и длины линии, приведённым в разделе 3.3.6.

Трансформирование матрицы A , умножение матриц и обращение матрицы $(A^T \cdot P \cdot A)$ можно выполнить либо с помощью программы *EXSEL*, либо с помощью любой другой программы, в которой есть операции с матрицами. После вычисления матрицы Q выбирается пара значений Q_X и Q_Y , сумма которых наибольшая, и по формуле (3.7) вычисляется СКО измерения горизонтального угла, а по формуле (3.8) – СКО измерения сторон хода.

Все операции с матрицами следует выполнять с тремя значащими цифрами; результаты вычислений μ_0, m_β, m_s – выражать в нужной размерности с двумя значащими цифрами.

При проектировании системы полигонометрических ходов предрасчёт точности её элементов выполняют на ПК по специально разработанным программам

Новые схемы полигонометрических ходов с координатной привязкой

В последние годы структура геодезических сетей претерпевает существенные изменения; для создания новых геодезических построений имеет значение тот факт, что нарушаются взаимные видимости между соседними исходными пунктами, и стандартные формы многих геодезических построений, в том числе и линейно-угловых ходов, оказываются неприемлимыми. Приходится строить линейно-угловые ходы и системы таких ходов с частичной или полной координатной привязкой. В некоторых публикациях этот факт уже учитывается, и предлагаются новые формы ходов с координатной привязкой, которые по точности и надёжности с успехом конкурируют со стандартными формами ходов. Рассмотрим эту проблему более подробно.

Стандартный разомкнутый линейно-угловой ход с координатной привязкой – это ход, у которого не измерены примычные углы ни в начале хода, ни в конце (рис.61); количество измерений сократилось на два, и избыточным оказывается всего одно измерение. Вследствие этого количество условных уравнений связи сократилось до единицы, что значительно ухудшило качество уравнивания хода. Но самое главное, в

таким ходом полностью отсутствует контроль угловых измерений; даже грубая ошибка хотя бы в одном измеренном угле не может быть обнаружена в принципе. Этот факт препятствует применению таких ходов, хотя необходимость в таких ходах возрастает, и чем дальше, тем больше.

Проведём линию СА, соединяющую два исходных пункта в начале хода, и решим обратную геодезическую задачу между точками С и А; в получившемся треугольнике СА(п+1) известны все три стороны и один угол (при точке п+1). Решив этот треугольник (либо по теореме синусов, либо по теореме косинусов), можно проконтролировать измерение элементов этого треугольника. Поскольку дирекционный угол стороны АС известен, а угол в треугольнике при точке А получился из решения треугольника, можно вычислить дирекционный угол стороны А(п+1), а потому угол в ходе при точке А становится примычным. Выполнив такие же вычисления в конце хода, получим примычный угол и в конце хода; то есть, появляется возможность вычисления угловой невязки в ходе АВ, и контроль угловых измерений восстановлен.

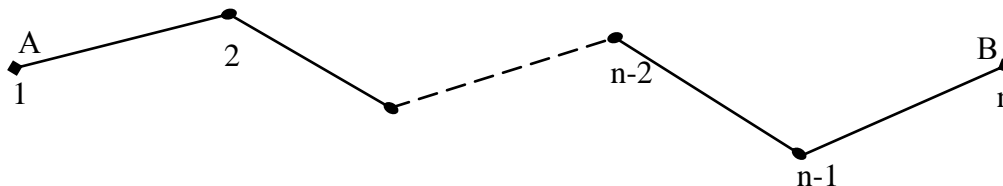


Рисунок 62 – Ход с полной координатной привязкой

Для восстановления контроля угловых измерений предлагается и в начале хода и в конце хода продлить ход до следующего исходного пункта, выполняя измерения углов и сторон (рис.63).

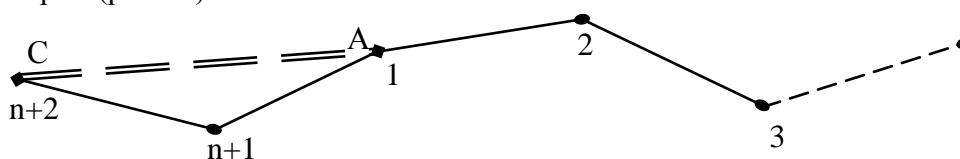


Рисунок 63 – Привязка в начале хода

Но это ещё не всё; в новом ходе САВД имеется 4 исходных пункта и 5 избыточных измерений: общее количество измерений будет равно пяти.

Следующий вариант хода с координатной привязкой учитывает случай, когда вблизи района работ больше нет исходных пунктов, и приходится обходиться всего двумя исходными пунктами. Предлагается вместо одного хода АВ проложить ещё один ход ВА, но по другому направлению (рис.64)

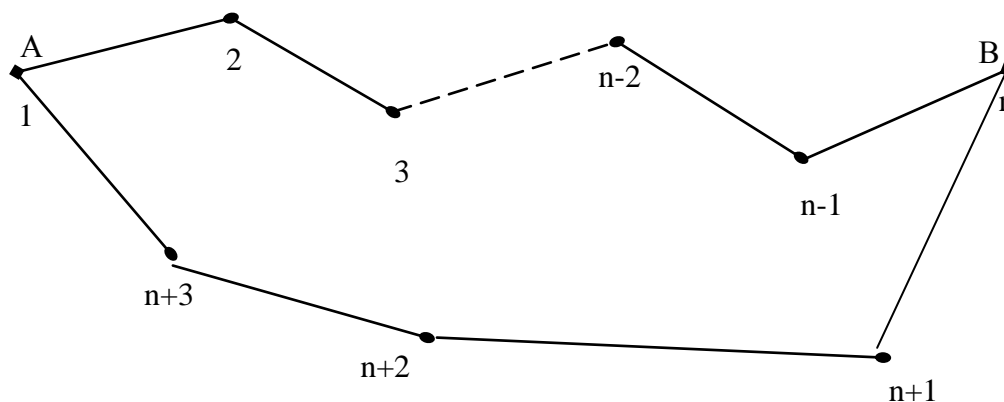


Рисунок 64 – Замкнутый ход с двумя исходными пунктами

В начале хода в точке А нужно дополнительно измерить угол 2А(п+3), в конце хода на точке В нужно измерить угол (п-1)В(п+1). В образовавшемся замкнутом ходе имеется два исходных пункта, четыре избыточных измерения и, следовательно, четыре условных уравнения связи.

Кроме одного хода ВА можно проложить между точками А и В ещё один или более ходов; в точках А и В нужно измерить углы между всеми сторонами новых ходов; такая форма полигонометрической сети, опирающейся всего на два исходных пункта, позволяет решить задачу создания сети сгущения на большой территории при ограниченном количестве исходных пунктов (всего два).

Поиск грубых ошибок измерений в линейно-угловых ходах

В отличие от нивелирных сетей, измеренные превышения которых образуют одномерное пространство измерений, измеренные углы и длины сторон в полигонометрических ходах образуют двумерное пространство измерений. Проблема поиска грубых ошибок в одномерном пространстве измерений практически уже решена (раздел 2.8), а в двумерном пространстве измерений такая проблема ещё не решена.

Рассмотрим два случая поиска одной грубой ошибки в стандартном разомкнутом линейно-угловом ходе: ошибочен один какой-либо угол и ошибочна одна какая-либо длина стороны хода.

Одна грубая ошибка в угле. Пусть в линейно-угловом ходе измерено шесть левых углов (рис.65–а), и угол β_3 измерен с грубой ошибкой (для определённости ошибка отрицательна).

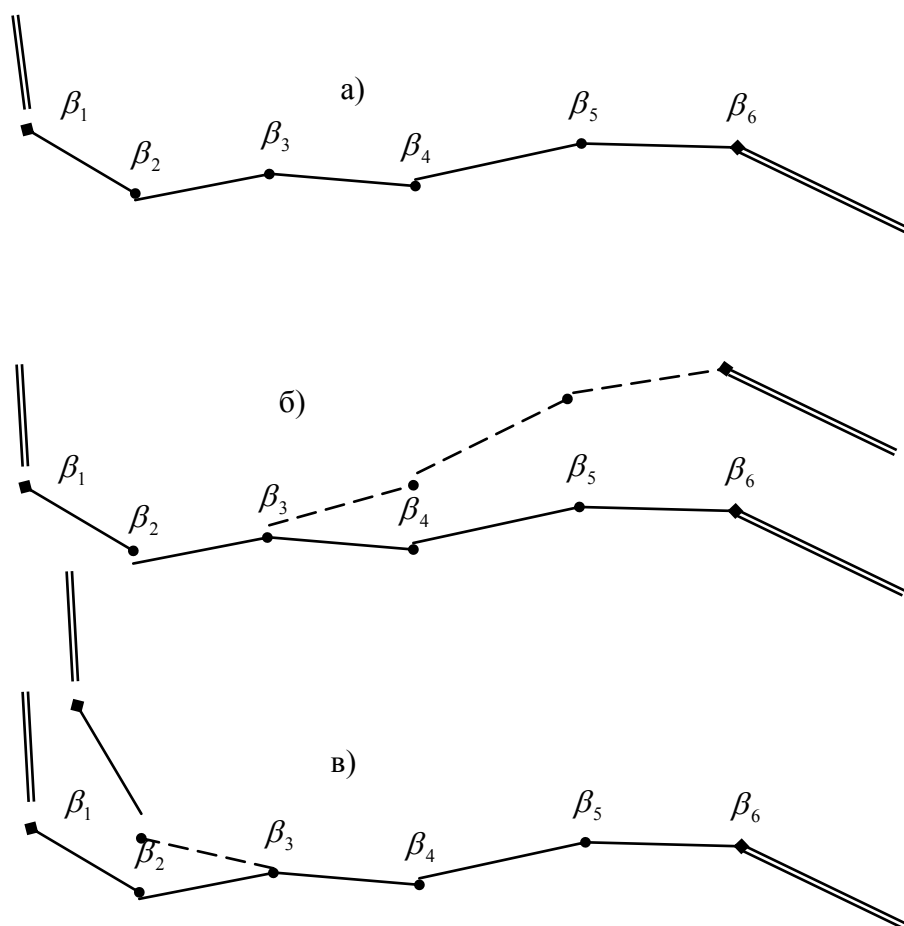


Рисунок 65 – Поиск грубой ошибки в одном угле хода

Вычислим координаты пунктов хода с начала хода; координаты пунктов 1, 2, и 3 будут правильными, а координаты остальных пунктов – неправильными (рис.65–б). Затем вычислим координаты пунктов с конца хода; в этом случае координаты пунктов 6, 5, 4 и 3 будут правильными, а координаты пунктов 2 и 1 – неправильными.

Подсчитаем для каждого пункта величину

$$\Delta = \sqrt{(X_{нач} - X_{кон})^2 + (Y_{нач} - Y_{кон})^2}$$

и построим график этой величины (рис.66)

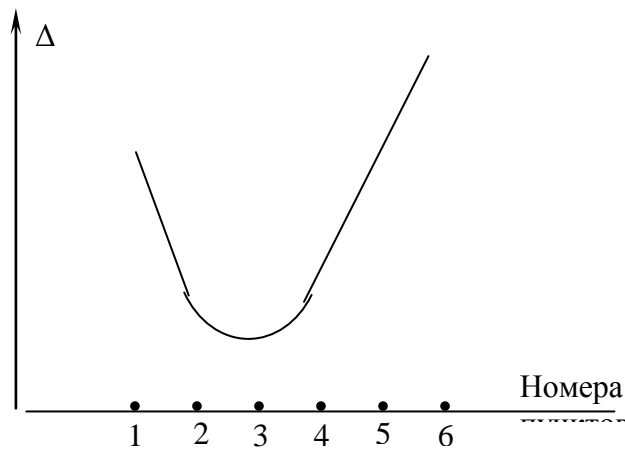


Рисунок 66 – График величин Δ

Нетрудно сообразить, что перегиб линии графика будет соответствовать пункту 3; то есть, горизонтальный угол β_3 содержит грубую ошибку.

Одна грубая ошибка в стороне. В этом случае абсолютная невязка хода f_s превышает допустимое значение, а угловая невязка находится в допуске; вывод: ошибочна какая-либо сторона. Подсчитываем дирекционный угол α_s абсолютной невязки хода по формулам обратной задачи, считая координатные невязки f_x и f_y приращениями координат. Если среди сторон хода есть сторона, дирекционный угол которой очень близок к дирекционному углу α_s , то делается заключение, что именно в длине этой стороны присутствует грубая ошибка. Если таких сторон в ходе не одна, а две или более, то задача не имеет определённого решения; примером такой ситуации является прямолинейный ход, в котором дирекционные углы всех сторон примерно одинаковы.

Две или более грубые ошибки рассмотренными способами локализовать невозможно; приходится применять метод наложения графиков поправок (см. раздел 2.8), но и он оказывается бессильным, если в ходе имеются параллельные или почти параллельные стороны.